Devoir surveillé

1 Les questions **1)** et **2)** qui suivent sont indépendantes.

1) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2 + \operatorname{Arctan} x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

a) Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbb{R}$ tout entier.

b) Étudier localement f au voisinage de 0.

2) Calculer : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

---

2 Dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose : $F = \operatorname{Vect}(\sin, \cos)$ et : $G = \left\{ f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \quad f(\pi) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0 \right\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer une expression explicite de la projection de $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur F parallèlement à G.

---

3 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $u^2 v = u$ et $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v)$.

1) Montrer que : $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} \left(uv - \operatorname{Id}_E \right) \subset \operatorname{Ker} u$.

2) En déduire que : $vuv = v$.

3) Montrer que uv est un projecteur de E, puis que : $\operatorname{Ker}(uv) = \operatorname{Ker} v$.

4) Montrer que : $\operatorname{Im}(uv) = \operatorname{Im} u$.

5) En déduire que : $uvu = u$, puis que : $v^2 u = v$.

---

4 Pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on appelle *racine carrée de f* tout endomorphisme $r \in \mathscr{L}(E)$ pour lequel : $f = r^2$.

1) Un exemple : On note d l'endomorphisme de dérivation $f \longmapsto f'$ de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, τ_α l'endomorphisme de décalage qui, à toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, associe la fonction $x \longmapsto f(x + \alpha)$.

a) On pose : $V = \operatorname{Vect}(\sin, \cos)$. Montrer que V est stable à la fois par d et par τ_α pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Proposer une valeur de α pour laquelle l'endomorphisme $\tau_\alpha\big|_V$ de V est une racine carrée de $d\big|_V$.

2) Noyaux itérés : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Comparer $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Ker} f^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) On suppose que : $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \geqslant p$: $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$.

Dans les questions **3)** à **6)**, on note D l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Racines carrées de D : On fait l'hypothèse que D possède une racine carrée R : $D = R^2$.

a) Que vaut $\operatorname{Ker} D^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

b) Montrer que les inclusions : $\operatorname{Ker} R^0 \subset \operatorname{Ker} R$ et $\operatorname{Ker} R \subset \operatorname{Ker} R^2$ sont strictes.

c) En déduire une contradiction.

4) Une condition nécessaire : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $D+\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ possède une racine carrée R : $D+\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]} = R^2$.

a) Montrer que R et D commutent.

b) Montrer que $\mathbb{R}_0[X]$ est stable par R.

c) En déduire que : $\lambda > 0$.

5) Racines carrées de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}+D$: On note $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ l'unique suite pour laquelle : $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}\big(x^n\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose en outre pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$: $R(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k P^{(k)}$ — avec une somme faussement infinie.

a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si :} \quad n \in \{0,1\} \\ 0 & \text{si :} \quad n \geqslant 2. \end{cases}$

b) Montrer que R est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

c) Montrer que : $R^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]} + D$.

6) Une condition suffisante : Montrer que l'endomorphisme $\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]} + D$ possède une racine carrée pour tout $\lambda > 0$. On en donnera une expression explicite en généralisant la démarche de la question **5)**, mais sans tout détailler.

Dans les questions **7)** et **8)**, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque de dimension finie.

7) Racines carrées de Id_E :

a) Montrer proprement que si : $\dim E = 2$, Id_E possède une infinité de racines carrées.

b) Généraliser au cas où : $\dim E \geqslant 2$.

8) Racines carrées de $-\mathrm{Id}_E$: On fait l'hypothèse que $-\mathrm{Id}_E$ possède une racine carrée r.

a) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F et $r(F)$ sont en somme directe, mais que : $E \neq F + r(F)$. On peut ainsi se donner un vecteur a de $E \setminus \big(F + r(F)\big)$ et poser : $G = F + \mathrm{Vect}(a)$. Montrer que G et $r(G)$ sont en somme directe.

b) En déduire que E est de dimension paire.

D'après la question **3)**, l'endomorphisme de dérivation D sur $\mathbb{R}[X]$ ne possède pas de racine carrée. Ce résultat signifie qu'il n'existe pas de *dérivation d'ordre* $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}[X]$. Alors qu'on sait dériver les polynômes une fois, deux fois, trois fois..., la question se pose en effet de savoir si on peut définir des dérivations d'ordre non entier, $\frac{1}{2}$ par exemple. La réponse est non sur $\mathbb{R}[X]$... mais oui dans le contexte plus général des fonctions ! En notant E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ nulles en 0, on peut montrer par exemple que l'endomorphisme R de E défini pour tout $f \in E$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad R(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t$ est une dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$, ce qui veut dire que : $R^2(f) = f'$. À notre niveau MPSI, il n'est même pas clair qu'une telle intégrale est bien définie... mais le plus étonnant dans tout cela, c'est que ces dérivations exotiques sont utiles — paraît-il ! — en mécanique des fluides et en théorie des caoutchoucs.