Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **5)** sont indépendantes. Aucune simplification numérique n'est attendue dans les questions **1)** et **2)**.

1) Combien le mot « MISSISSIPPI » possède-t-il d'anagrammes commençant par une consonne ?

2) De combien de manières peut-on choisir simultanément 10 entiers dans $[\![1,20]\!]$ dont au moins 6 sont impairs et exactement 3 sont congrus à 2 modulo 4 ?

3) Combien l'ensemble $[\![1,3n]\!]$ possède-t-il de parties contenant autant d'entiers divisibles par 3 que d'entiers qui ne le sont pas ? On donnera le résultat final après simplification sous la forme d'un simple coefficient binomial.

Bonus spécial : Trouver une preuve grâce à laquelle le coefficient binomial cherché apparaît naturellement sans aucune simplification calculatoire postérieure.

4) Soit $n \geqslant 3$.

a) Sur un cercle sont disposés n points distincts et on en choisit deux. Avec quelle probabilité sont-ils voisins ?

b) Même question avec une droite à la place d'un cercle.

5) Dans une chaîne de n individus numérotés de 1 à n, l'individu 1 a reçu une information I et on s'intéresse à la circulation de cette information le long de la chaîne. Un individu qui doit transmettre I et qui ment transmet une information notée $\overline{I}$. De même, un individu qui doit transmettre $\overline{I}$ et qui ment transmet I. Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, l'individu k transmet à l'individu $k+1$ l'information qu'il détient, mais il lui ment avec probabilité $p \in]0,1[$.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note T_k l'événement « L'individu k a reçu l'information I ».

a) Exprimer $P(T_{k+1})$ en fonction de $P(T_k)$ pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, puis en déduire une expression explicite de $P(T_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

b) Une information relayée par un grand nombre de personnes selon les hypothèses de la question est-elle fiable ? Discuter en fonction de p.

---

2 Pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on appelle *racine carrée de* f tout endomorphisme $r \in \mathscr{L}(E)$ pour lequel : $f = r^2$. L'ensemble des racines carrées de f sera noté $\mathscr{R}(f)$.

1) Premiers exemples :

a) Proposer un exemple simple de racine carrée de l'endomorphisme $P \longmapsto P(X+1)$ de $\mathbb{R}[X]$.

b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et on note $\widehat{M_\theta}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M_θ. Simplifier $M_\varphi M_\psi$ pour tous $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, puis en déduire une racine carrée de $\widehat{M_\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

2) Racines carrées de Id_E : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

a) Montrer que si : $\dim E = 2$, Id_E possède une infinité de racines carrées.

b) Généraliser au cas où : $\dim E \geqslant 2$.

3) Analyse d'une situation courante : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On fait l'hypothèse qu'il existe deux endomorphismes non nuls p et q de E et deux réels distincts λ et μ pour lesquels :

$$\mathrm{Id}_E = p + q, \qquad f = \lambda p + \mu q \qquad \text{et} \qquad f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q.$$

a) Montrer l'égalité : $\big(f - \lambda \mathrm{Id}_E\big)\big(f - \mu \mathrm{Id}_E\big) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

b) En déduire que : $pq = qp = 0_{\mathscr{L}(E)}$, puis que p et q sont des projecteurs et que : $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

c) Calculer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(p,q)$ de $\mathscr{L}(E)$.

On suppose désormais que λ et μ sont strictement positifs.

d) Montrer que $\mathscr{R}(f) \cap \mathrm{Vect}(p,q)$ est un ensemble de cardinal 4.

On suppose dans les questions **e)**, **f)** et **g)** que : $n = 2$. On veut montrer qu'alors : $\mathscr{R}(f) \subset \text{Vect}(p, q)$.

e) Justifier l'existence d'une base (a, b) de E pour laquelle : $p(a) = a$ et $q(b) = b$.

f) Montrer que : $\text{Ker}\left(f - \lambda \text{Id}_E\right) = \text{Vect}(a)$ et $\text{Ker}\left(f - \mu \text{Id}_E\right) = \text{Vect}(b)$.

g) En déduire que pour tout $r \in \mathscr{R}(f)$: $r(a) \in \text{Vect}(a)$ et $r(b) \in \text{Vect}(b)$, puis que : $r \in \text{Vect}(p, q)$.

h) On suppose dans cette question que : $n \geqslant 3$. D'après **c)**, on peut donc supposer sans perte de généralité que : $\text{rg}(p) \geqslant 2$. Montrer que : $\mathscr{R}(f) \not\subset \text{Vect}(p, q)$.

4) Généralisation de la situation précédente : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ distincts pour lesquels : $\left(f - \lambda_1 \text{Id}_E\right) \ldots \left(f - \lambda_r \text{Id}_E\right) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

On note $L_1, \ldots, L_r$ les polynômes de Lagrange de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ et on pose pour tout $i \in [\![1, r]\!]$: $p_i = L_i(f)$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$: $f^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i$.

b) Montrer que pour tous $i, j \in [\![1, r]\!]$ distincts : $p_i p_j = p_j p_i = 0_{\mathscr{L}(E)}$, puis que $p_1, \ldots, p_r$ sont des projecteurs.

On suppose désormais que les projecteurs $p_1, \ldots, p_r$ sont non nuls.

c) Calculer la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(p_1, \ldots, p_r)$ de $\mathscr{L}(E)$.

d) Montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont strictement positifs, $\mathscr{R}(f) \cap \text{Vect}(p_1, \ldots, p_r)$ est un ensemble de cardinal 2^r.

---

3 Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$.

1) Déterminer : $S_{n,1}$, $S_{n,2}$, $S_{n,n}$ et $S_{n+1,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que $S_{n,p}$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n < p$.

2) a) Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n > p$: $S_{n+1,p+1} = (p+1)\left(S_{n,p+1} + S_{n,p}\right)$. On pourra observer que la restriction à $[\![1, n]\!]$ d'une surjection de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, p+1]\!]$ est surjective ou ne l'est pas.

b) Vérifier que le résultat de la question **a)** est encore vrai si $n \leqslant p$.

c) Dresser un tableau des entiers $S_{n,p}$, n et p décrivant $[\![1, 5]\!]$.

3) On veut montrer de deux manières différentes que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$: $p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$ ★.

a) Montrer la relation ★ grâce aux résultats des questions précédentes.

b) Redémontrer la relation ★ par une méthode de double comptage.

4) a) Montrer par une méthode de double comptage que pour tous $p, k, l \in \mathbb{N}$ avec $l \leqslant k \leqslant p$: $\binom{p}{k}\binom{k}{l} = \binom{p}{l}\binom{p-l}{k-l}$.

b) En déduire que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$: $S_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

c) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n, p)$ la probabilité de tirer une application surjective quand on choisit une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ au hasard. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la limite : $\lim_{n \to +\infty} P(n, p)$. Le résultat est-il conforme à l'intuition ?
