Devoir surveillé

1 Les questions **1)**, **2)** et **3)** suivantes sont indépendantes.

1) **a)** Calculer le reste de la division euclidienne de 5^n par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que l'équation $x^2+9 = 5^n$ d'inconnue $(n,x) \in \mathbb{N}^2$ possède une et une seule solution. On pourra commencer par s'intéresser à la parité de n.

2) On s'intéresse à l'équation : $3^m - 2^n = 1 \quad \bigstar$ d'inconnue $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

a) Déterminer toutes les solutions d'$\bigstar$ pour lesquelles $n \leqslant 3$.

On se donne à présent un couple (m,n) solution d'$\bigstar$ pour lequel $n \geqslant 4$.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad 3^k \equiv 1\ [16] \iff k \equiv 0\ [4]$.

c) En déduire que m est divisible par 4.

d) Dénicher une contradiction en raisonnant modulo 5.

3) On pose pour tout $p \in \mathbb{R}$: $\quad M_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ p & 1 & p \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice M_1 est inversible et calculer son inverse. Plus généralement, à quelle condition nécessaire et suffisante sur p la matrice M_p est-elle inversible (le calcul de l'inverse n'est pas demandé) ?

b) Résoudre le système linéaire $M_2 X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

---

2 Pour tous ensembles non vides E et F et pour toute application $f : E \longrightarrow F$, on dit que f est :

— *presque surjective* (*de E sur F*) si tout élément de F, sauf peut-être un, possède au moins un antécédent par f dans E.

— *doublement surjective* (*de E sur F*) si tout élément de F possède au moins deux antécédents par f dans E.

— *presque doublement surjective* (*de E sur F*) si tout élément de F, sauf peut-être un, possède au moins deux antécédents par f dans E. L'éventuel élément de F qui ne possède pas deux antécédents par f peut ne pas en posséder du tout.

1) Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

a) Montrer que si f est doublement surjective et g surjective, alors $g \circ f$ est doublement surjective.

b) Montrer que si f est surjective et g doublement surjective, alors $g \circ f$ est doublement surjective.

c) Montrer que si f et g sont presque doublement surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

2) **a)** La fonction $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ est-elle surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$? Presque surjective ? Doublement surjective ? Presque doublement surjective ?

b) Même question avec la fonction $z \longmapsto az^2 + bz + c$ pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$.

3) **a)** Montrer que toute fonction continue presque surjective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ est surjective.

b) Proposer un exemple de fonction continue non surjective mais presque surjective de $\mathbb{R}$ sur $[0,1]$. Une expression explicite est attendue, mais à défaut, une figure soignée sera appréciée.

4) **(Sans doute à laisser de côté dans un premier temps)** Proposer un exemple de deux applications presque surjectives dont la composée n'est pas presque surjective.

---

3 Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On rappelle qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *symétrique* si $M^\top = M$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{E}_p$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles $M^p = I_n$, puis on pose $\mathscr{E} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathscr{E}_p$.

1) Montrer que pour toute matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, M^k est aussi une matrice symétrique.

2) On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et on pose pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $\quad M(a,b) = aI_n + bJ$, ainsi que $\mathscr{M} = \left\{ M(a,b) \mid \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Montrer **SANS** récurrence que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $\quad M(a,b)^p = M\left(a^p, \dfrac{(a+nb)^p - a^p}{n}\right)$.

b) Montrer que l'application $(a,b) \longmapsto M(a,b)$ est injective sur $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{E}$: $\quad M^2 = I_n$.

On généralise dans les questions qui suivent le résultat de la question **2)c)**.

3) Montrer que pour toute matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\quad \mathrm{tr}\big(M^2\big) \geqslant 0$. À quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité ?

4) Soit $M \in \mathscr{E}_4$. Simplifier $\big(M^2 - I_n\big)^2$ et $\big(M^3 - M\big)^2$, puis montrer que $M^2 = I_n$.

5) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ impair et $M \in \mathscr{E}_p$. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} M^k$.

a) Simplifier MS, puis montrer que $S^2 = pS$.

b) Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, on note r_k le reste de la division euclidienne de $2k$ par p. Montrer que l'application $k \longmapsto r_k$ est bijective de $[\![0, p-1]\!]$ sur lui-même.

c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant p-1} \big(M^j - M^i\big)^2 = 0$.

d) En déduire que $M = I_n$.

6) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{E}$: $\quad M^2 = I_n$.

7) Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles $MM^\top M = I_n$.

---

4 **(Difficile)** Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir **TRÈS BIEN RÉUSSI** tout le reste !

Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$, si r^r est rationnel, r est un entier.
