Devoir surveillé

1 Montrer que l'équation : $4^m + 11^n = x^2$ d'inconnue $(m,n,x) \in \mathbb{N}^3$ n'a pas de solution. On pourra s'intéresser à la parité/imparité de n en raisonnant modulo 3 et modulo 4.

2

1) Soient $m \in \mathbb{N}$ et, s'il en existe, p un diviseur premier de m^2+m+1 strictement supérieur à 3.

a) Montrer que : $m^3 \equiv 1\ [p]$, mais que : $m \not\equiv 1\ [p]$ et $m^2 \not\equiv 1\ [p]$.

b) En déduire, grâce au petit théorème de Fermat, que : $p \equiv 1\ [3]$.

2) Montrer que l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 3 est infini.

3

1) Soient $u,v,w \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux. Montrer que si le produit uvw est un carré parfait, les entiers u, v et w sont eux aussi des carrés parfaits.

2) On note S l'ensemble des couples $(m,n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ pour lesquels : $n(n+1)(n+2) = m^2$.

a) Montrer que pour tout $(m,n) \in S$ pour lequel n est pair, il existe des entiers $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels : $n = 2a^2$, $n+1 = b^2$ et $n+2 = 2c^2$.

b) Déterminer S.

---

4 Dans tout ce problème, pour tout ensemble E, pour toute application $f : E \longrightarrow E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n désigne la composée $f \circ \ldots \circ f$ (n fois) avec par convention : $f^0 = \mathrm{Id}_E$. On rappelle qu'une partie A de E est dite *stable par f* si : $f(A) \subset A$.

1) Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application et A une partie de E. On pose : $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$.

a) Montrer que B contient A et est stable par f.

b) Soit C une partie de E contenant A et stable par f. Montrer que C contient B.

En résumé, B est la plus petite partie de E — au sens de l'inclusion — contenant A et stable par f.

2) On note f la fonction $z \longmapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer la plus petite partie de $\mathbb{C}$ contenant $\{3, \mathrm{i}\}$ et stable par f.

3) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+3}{4}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et on pose : $A = [2,4]$ et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels u_n et v_n pour lesquels : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $f^n(A) = [u_n, v_n]$.

b) Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

c) En déduire B.

4) Soient E un ensemble **fini** et σ une *permutation de E*, i.e. une bijection de E sur E. La notation σ^n a été définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais la bijectivité de σ offre la possibilité d'une généralisation aux entiers négatifs. Pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on note σ^n la composée $\sigma^{-1} \circ \ldots \sigma^{-1}$ (n fois).

On définit sur E une relation $\sim$ de la façon suivante — pour tous $x,y \in E$: $x \sim y \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ y = \sigma^k(x)$.

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

b) Soit $x \in E$. Pourquoi l'application $k \longmapsto \sigma^k(x)$ n'est-elle pas injective sur $\mathbb{N}$?
En déduire que l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^k(x) = x\right\}$ possède un plus petit élément $n(x)$.

c) Montrer que les éléments $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{n(x)-1}(x)$ sont deux à deux distincts pour tout $x \in E$.

d) Montrer que pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x pour $\sim$ est l'ensemble $\left\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{n(x)-1}(x)\right\}$.

5) On conserve les notations de la question **4)**. On note $X_1, \ldots, X_r$ les classes d'équivalence distinctes de E pour $\sim$ et $n_1, \ldots, n_r$ leurs cardinaux respectifs. On rappelle que : $E = \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant r} X_i$ (réunion disjointe).

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note σ_i l'application de E dans E définie par : $\sigma_i|_{X_i} = \sigma|_{X_i}$ et $\sigma_i|_{E \setminus X_i} = \mathrm{Id}_{E \setminus X_i}$.

a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$: $\sigma_i^{n_i} = \mathrm{Id}_E$. En déduire que σ_i est une permutation de E.

b) Montrer que pour tous $i, j \in [\![1, r]\!]$ distincts : $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$.

c) Montrer que : $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$.

d) Montrer que : $\sigma^{n_1 \vee \ldots \vee n_r} = \mathrm{Id}_E$.

---

5 **(Très difficile)** Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ injective : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^2} = +\infty$.
