DEVOIR SURVEILLÉ

1 On pose pour tout $x > 0$: $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$. On **ADMET** que φ possède des limites finies en 0 et $+\infty$, que l'on note respectivement ℓ_0 et $\ell_{+\infty}$.

1) Calculer une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+2t+2}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer, grâce au changement de variable : $t = \dfrac{2}{u}$, que pour tout $x > 0$: $\varphi(x) = \varphi\left(\dfrac{2}{x}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)\ln 2 + K$ où K est une constante.

3) En déduire l'égalité : $\ell_{+\infty} - \ell_0 = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

Il paraît naturel de noter $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$ le réel $-\ell_0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$ le réel $\ell_{+\infty}$, mais remarquez bien qu'aucun de ces deux réels n'a de sens comme intégrale pour nous à ce stade de l'année, pas même ℓ_0 car la fonction intégrée n'est en aucun cas définie et continue sur le segment $[0,1]$. Le résultat de la question **3)** s'écrit plus joliment dans ce cadre :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln 2.}$$

2

1) Résoudre pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation différentielle : $(1+x^2)y' + 2xy = x^n$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) En déduire l'unique solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} (1+x^2)y' + 2xy = 3x^3 - x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3) Soit P une fonction polynomiale. À quelle condition nécessaire et suffisante sur P l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y' + 2xy = P(x)$$

d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ possède-t-elle une solution de limite finie en $+\infty$?

3

1) Montrer par changement de variable que : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{4x-x^2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{\mathrm{d}u}{1+\sqrt{1-u^2}}$.

2) Effectuer le changement de variable : $u = \cos t$ dans l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{\mathrm{d}u}{1+\sqrt{1-u^2}}$.

3) **a)** Exprimer $\sin\theta$ en fonction de $\tan\dfrac{\theta}{2}$ pour tout $\theta \in \left]-\pi,\pi\right[$.

b) En déduire que : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{4x-x^2}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

4) En déduire enfin la valeur de : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{4x-x^2}}$.

4

1) Simplifier : $\cos\big(2 \operatorname{Arccos} x\big)$ et $\sin\big(2 \operatorname{Arccos} x\big)$ pour tout $x \in [-1,1]$.

2) Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' + 4y = 3x - 4 \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ d'inconnue $y :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On procèdera pour cela au changement de variable : $x = \cos t$.

---

5 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^x \, \mathrm{d}t$ et $g(x) = (x+1)f(x)f(x+1)$.

1) Montrer, en intégrant par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$.

2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $g(x+1) = g(x)$, puis déterminer la valeur de $g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

4) Soit $x \in [0,1[$.

a) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{x+n+1}{n+2}\, g(n+1) \leqslant g(x+n) \leqslant \dfrac{x+n+1}{n+1}\, g(n)$.

b) En déduire la valeur de $g(x)$.

Il découle des questions précédentes que g est constante sur $\mathbb{R}_+$.

5) Montrer proprement, à partir de l'inégalité : $f(x+1) \leqslant f(x) \leqslant f(x-1)$, que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\, f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6) **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in [0,x]$: $\left(1 - \dfrac{t^2}{x^2}\right)^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{x^2}\right)^{-x^2}$.

b) En déduire, en posant : $t = x \sin u$ d'une part et : $t = x \tan u$ d'autre part, que pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$x f\big(2x^2+1\big) \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant x f\big(2x^2-2\big).$$

c) En déduire finalement que la limite : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ce résultat apparaît un peu partout en mathématiques, notamment en théorie des probabilités avec la loi normale centrée réduite sous la forme suivante — après changement de variable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \qquad \textit{(intégrale de Gauss)}.$$

---

6 **(Bonus)** Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir **TRÈS BIEN RÉUSSI** tout le reste !

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_0^x t f(x-t) \, \mathrm{d}t$.
