# Devoir surveillé

**1**

**1)** Résoudre l'équation différentielle : $y' \sin x + y \cos x = x \ln x$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}\big(]0,\pi[,\mathbb{R}\big)$.

**2)** Montrer que l'équation de la question **1)** possède une et une seule solution $y$ pour laquelle : $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$.

---

**2** On pose : $I = \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On souhaite calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \sqrt{\tan x}$ sur $I$.
On note pour cela $S$ la fonction $x \longmapsto \sqrt{\tan x} + \dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$ et $D$ la fonction $x \longmapsto \sqrt{\tan x} - \dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$ sur $I$.

**1) a)** Montrer que pour tout $x \in I$ : $S(x) = \dfrac{\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}}$.

**b)** En déduire une primitive de $S$ sur $I$.

**2) a)** En adaptant le travail de la question **1)**, montrer que : $\displaystyle\int D(x)\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$ après un certain changement de variable à préciser.

**b)** En déduire une primitive de $D$ sur $I$ grâce au changement de variable : $u = t + \sqrt{t^2-1}$.

**3)** Conclure.

---

**3** Résoudre l'équation différentielle : $2xy'' + \big(1-2\sqrt{x}\big)y' + y = 1$ d'inconnue $y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.
On procèdera pour cela au changement de variable : $x = t^2$.

---

**4** On souhaite montrer que les deux réels e et $\pi$ sont irrationnels. Les parties **A** et **B** sont tout à fait indépendantes.

### A – Irrationalité de e

**1)** Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé.

**a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\displaystyle \mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + \frac{z^{n+1}}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{zt}(1-t)^n\,\mathrm{d}t$.

**b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\displaystyle \left|\mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^{|\mathrm{Re}(z)|}$, puis que : $\displaystyle \mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$. On pourra distinguer, pour l'inégalité, les cas : $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$ et $\mathrm{Re}(z) < 0$.

**2)** Raisonnant par l'absurde, on fait l'hypothèse que e est rationnel, i.e. que : $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ pour certains $p,q \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\displaystyle \left|n!p - q\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\right| \leqslant \frac{p}{n+1}$.

**b)** En déduire une contradiction.

**B – Irrationalité de $\pi$**

Raisonnant par l'absurde, on fait l'hypothèse que $\pi$ est rationnel, i.e. que : $\pi = \dfrac{p}{q}$ pour certains $p, q \in \mathbb{N}^*$.

On pose pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ : $f_n(x) = \dfrac{x^n(p-qx)^n}{n!}$, puis : $I_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(x)\ \sin x\ \mathrm{d}x$.

**3)** Calculer le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto x(p-qx)$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 < I_n \leqslant \frac{\pi}{n!}\left(\frac{p\pi}{4}\right)^n.$$

**4)** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On **admet** dans cette question que : $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

**a)** Simplifier $f_n(\pi - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis montrer que : $f_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

**b)** Montrer par récurrence sur $k$ que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un entier $a_{n,k} \in \mathbb{Z}$ pour lequel :

$$I_n = a_{n,k} + (-1)^k \int_0^\pi f_n^{(2k+1)}(x)\ \cos x\ \mathrm{d}x.$$

**5)** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

**a)** Montrer qu'il existe des entiers $e_n, \ldots, e_{2n} \in \mathbb{Z}$ pour lesquels pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} e_i x^i$.

**b)** Montrer que la fonction $f_n^{(2n+1)}$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

**c)** Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$ : $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

**6)** Achever de montrer que $\pi$ est irrationnel.