# Devoir surveillé

**1**

**1)** Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1,+\infty[$ au moyen du changement de variable : $t = \sqrt{x^2-1}$.

**2)** Résoudre l'équation différentielle : $\bigstar \quad (x^2-1)y' + xy = \dfrac{1}{x}$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(]1,+\infty[,\mathbb{R})$.

**3)** Montrer que l'équation différentielle $\bigstar$ possède une et une seule solution de limite finie en 1. Que vaut cette limite ?

---

**2** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose pour tout $x > 0$ : $I_n(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t^n+1)(t^2+t+1)}$.

**1)** Montrer que pour tout $x > 0$ : $I_n(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$ au moyen d'un changement de variable simple.

**2)** En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_n(x)$.

---

**3**

**1)** Simplifier : $\cos(2\,\mathrm{Arccos}\,x)$ et $\sin(2\,\mathrm{Arccos}\,x)$ pour tout $x \in [-1,1]$.

**2)** Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' + 4y = 3x - 4 \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ d'inconnue $y : ]-1,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On procèdera pour cela au changement de variable : $x = \cos t$.

---

**4** On **admet** que toute fonction continue est bornée sur tout segment sur lequel elle est définie (*théorème des bornes atteintes*). Ce résultat justifie l'existence de la borne supérieure de la question **1)b)**.

**1)** Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable autant de fois qu'on veut et $x \in \mathbb{R}$.

**a)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t$.

**b)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{(0,x)} \left| f^{(n+1)} \right|$,

où $\displaystyle\sup_{(0,x)} \left| f^{(n+1)} \right|$ désigne la borne supérieure de $\left| f^{(n+1)} \right|$ sur le segment $[0,x]$ si : $x \geqslant 0$ et $[x,0]$ si : $x < 0$.

**2)** Déduire du résultat de la question **1)b)** que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ et $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

---