Devoir surveillé

1 Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes.

1) Calculer : $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+13}$.

2) On souhaite calculer l'intégrale : $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{3+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer l'égalité : $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x$, puis l'égalité : $\displaystyle I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{3+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x$.

b) Effectuer dans le résultat précédent le changement de variable : $t = x - \dfrac{\pi}{4}$, puis le changement de variable : $u = \sin t$, et enfin calculer I.

---

2 Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 5y = 2x \\ y(1) = 1 \quad \text{et} \quad y'(1) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.
On procèdera pour cela au changement de variable : $x = \mathrm{e}^t$ en introduisant une fonction auxiliaire.

---

3 On s'intéresse à l'équation différentielle : $\bigstar \quad (x-1)y' + y = 2x$ d'inconnue y dérivable.

1) a) Résoudre $\bigstar$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

b) Déterminer les solutions d'$\bigstar$ sur $]1, +\infty[$ dont la limite en 1 existe et est finie.

On admet que les résultats des questions **1)a)** et **1)b)** restent valables sans changement sur $]-\infty, 1[$.

2) Résoudre $\bigstar$ sur $\mathbb{R}$ tout entier avec la condition initiale : $y(0) = 0$.

---

4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$ (*intégrale de Wallis*) et $\displaystyle b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$.

1) a) Calculer a_0 et a_1.

b) Montrer, en intégrant par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\,a_n$.

2) a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin t$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant b_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right)$.

c) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.

3) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_{2n+2} = (2n+2)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t,$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}.$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}.$

d) En déduire enfin que : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$ ce que l'on note aussi : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \rho_n = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}.$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \rho_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2^{4n+1}} \dbinom{2n}{n}^2.$

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 1 \leqslant \rho_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}.$

d) En déduire la *formule de Wallis* : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \ln \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\,\mathrm{e}^n}.$

a) Montrer, en calculant explicitement l'intégrale, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - x^2} = u_{n+1} - u_n.$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right).$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On pose : $\quad \lambda = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \quad$ et $\quad \mu = \mathrm{e}^{-\lambda}.$

On admettra ici le *théorème des suites extraites* selon lequel il est aussi vrai que : $\quad \lambda = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n}.$

d) Déduire de la formule de Wallis l'égalité : $\quad \mu = \sqrt{2\pi}, \quad$ puis la *formule de Stirling* :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.}$$