DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **3)** suivantes sont indépendantes.

1) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos(3x)\,\mathrm{d}x$.

2) a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^3+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2$ grâce à une décomposition en éléments simples.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[3]{t-1}}$ grâce au changement de variable $u=\sqrt[3]{t-1}$.

3) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle a_n=\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ et $\displaystyle b_n=1+\sum_{k=2}^n\left(\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$. Ainsi $b_1=1$.

a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) En déduire l'existence d'un réel γ, appelé la *constante d'Euler*, pour lequel $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma$.

c) En déduire que pour tout $x>0$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor nx\rfloor}\frac{1}{n+k}=\ln(1+x)$.

2

1) On note f la fonction $x\longmapsto x^2(2-x)$ sur $\mathbb{R}$.

a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. En déduire que $[0,2]$ est stable par f.

b) Étudier le signe de $x\longmapsto f(x)-x$ sur $[0,2]$.

c) Montrer que l'équation $f(x)=1$ d'inconnue $x\in[0,2]$ possède exactement deux solutions qu'on déterminera explicitement — l'une est évidente. Montrer ensuite que le segment d'extrémités ces deux solutions est stable par f.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0\in[0,2]$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle en fonction de u_0.

3) Désormais $u_0\in]0,1[$ et on pose $\displaystyle v_n=\frac{\ln(2u_n)}{2^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1-\frac{u_n}{2}\right)$.

b) En déduire que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $p\geqslant n$: $\displaystyle v_p-v_n\geqslant\frac{1}{2^n}\ln\left(1-\frac{u_n}{2}\right)$.

c) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement négatif.

d) En déduire l'existence d'un réel $\alpha\in]0,1[$ pour lequel la suite $\displaystyle\left(\frac{u_n}{\alpha^{2^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul que l'on précisera. On commencera par faire tendre p vers $+\infty$ dans le résultat de la question **b)**.

---

3 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,\mathrm{d}t$ (*intégrales de Wallis*) et $\displaystyle b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que pour tout $x>-1$: $\ln(1+x)\leqslant x$.

1) a) Calculer a_0 et a_1, puis montrer que $a_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) Étudier la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer, grâce à une intégration par parties, que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}\,a_n$.

2) a) Montrer, si possible par un argument de convexité/concavité, que pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $\displaystyle t\leqslant\frac{\pi}{2}\sin t$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle 0\leqslant b_n\leqslant\frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n}-a_{2n+2}\right)$.

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_{2n}}=0$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_{2n+2} = (2n+2)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)\, b_n - (2n+2)\, b_{n+1}$, $\quad$ puis que $2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (n+1)\, a_n a_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrer proprement, à partir de l'inégalité $a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant a_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n \sqrt{n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, n]$: $\quad \left(1 - \dfrac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n^2}\right)^{-n^2}$.

b) En déduire, en posant $t = n \sin u$ d'une part et $t = n \tan u$ d'autre part, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n\, a_{2n^2+1} \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant n\, a_{2n^2-2}.$$

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_{\lfloor x \rfloor}^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = 0$, puis en déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ (*intégrale de Gauss*).

---

4 Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir **TRÈS BIEN RÉUSSI** tout le reste !

1) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites strictement positives. On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n b_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} B_n = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{A_n}{B_n} = 1$.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{n^\alpha} = \alpha+1$ pour tout $\alpha > -1$, puis en déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha$.
