Devoir surveillé

1 On note f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si : } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si : } x \in [0,1] \\ e^{3x-4} & \text{si : } x > 1. \end{cases}$

On s'intéresse à une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que f possède exactement deux points fixes sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de $x \longmapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$. On notera α et β les deux points fixes obtenus dans l'ordre : $\alpha < \beta$.

On admet que α et β sont les seuls points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle dans chacune des situations suivantes :

a) $u_0 \geqslant \beta$. **b)** $u_0 \in [0,1]$. **c)** $u_0 < 0$.

3) On suppose que : $u_0 \in]1, \beta[$.

a) Montrer par l'absurde que pour un certain $N \in \mathbb{N}$: $u_N \in [0,1]$.

b) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limité éventuelle.

---

2 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = (n+1)u_n + \sqrt{u_n}$.

1) a) Justifier la bonne définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

b) Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite le cas échéant.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $r_n = \dfrac{u_n}{n!}$.

a) Étudier la monotonie de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $r_{n+1} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n!}}\right) r_n \leqslant \dfrac{n^2}{(n+1)(n-1)}\, r_n$.

c) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

---

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ (*intégrales de Wallis*) et $b_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, dt$.

1) a) Calculer a_0 et a_1, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$.

b) Montrer, en intégrant par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, a_n$.

2) a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \sin t$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant b_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right)$.

c) En déduire enfin la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{2n+2} = (2n+2)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, dt$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\rho_n = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant \rho_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\rho_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2^{4n+1}} \dbinom{2n}{n}^2$.

d) En déduire la *formule de Wallis* : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \ln \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\,\mathrm{e}^n}$.

a) On **ADMET** dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et on pose : $\displaystyle \lambda = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\mu = \mathrm{e}^{-\lambda}$.
Déduire de la formule de Wallis l'égalité : $\mu = \sqrt{2\pi}$, puis la *formule de Stirling* : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$.

b) Montrer, en calculant explicitement l'intégrale, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - x^2} = u_{n+1} - u_n$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
