DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)** et **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^\alpha + \ln n}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) **a)** Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$ sur $]0,\pi[$ grâce au changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

b) Résoudre l'équation différentielle $y'\sin x - y\cos x = 1$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}\big(]0,\pi[,\mathbb{R}\big)$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)\left(t^2+t+1\right)}$.

4) Résoudre, grâce au changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, l'équation différentielle $x^4 y''(x) + 2x^2(x+1)\,y'(x) + 3y(x) = 1$ d'inconnue $y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

---

2 On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) **a)** Calculer a_1.

b) Calculer a_0 grâce au changement de variable $x = \operatorname{sh} t$.

2) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. $\quad$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

4) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (n+2)\,a_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)\,a_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (2n+3)\,a_{n+2} \leqslant \sqrt{2}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n$.

5) On pose $b_n = (n+1)\,a_n a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et vérifier que $b_n + b_{n+1} = a_{n+1}\sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$. On pourra commencer par montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = 0$.

---

3 Ce problème est plus difficile que les exercices précédents.

On pose $\omega = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^4}\,\mathrm{d}t$ et pour tous $a,b > 0$: $\quad I(a,b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$.

1) Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ et $u,v \in I$ pour lesquels $u < v$. Justifier soigneusement les limites :

$$\lim_{r\to u^+} \int_r^v f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to v^-} \int_u^s f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) **a)** Montrer que pour tout $s \in [0,1[$: $\quad \displaystyle\int_0^s \sqrt{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{s}{3}\sqrt{1-s^4} + \frac{2}{3}\int_0^s \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$.

b) En déduire, grâce au changement de variable $t = \cos x$, que $\omega = \dfrac{2}{3}\, I\big(\sqrt{2},1\big)$.

3) Montrer que pour tous $a,b > 0$ pour lesquels $b \leqslant a$: $\quad \dfrac{\pi}{2a} \leqslant I(a,b) \leqslant \dfrac{\pi}{2b}$.

4) Montrer que pour tous $a, b > 0$: $\quad I(a,b) = \lim\limits_{s \to +\infty} \int_0^s \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$ grâce au changement de variable $t = b \tan x$.

5) Soient $a, b > 0$. On note φ la fonction $t \longmapsto \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Vérifier que pour tout $t > 0$: $\quad \varphi(t)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}{4t^2}$ et $\varphi(t)^2 + ab = \frac{(t^2+ab)^2}{4t^2}$.

b) En déduire que pour tous $r, s > 0$ pour lesquels $r < s$:

$$\int_r^s \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^{-\varphi(r)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+ab)\left(u^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)}} + \frac{1}{2}\int_0^{\varphi(s)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+ab)\left(u^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)}}.$$

c) En déduire que $I\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = I(a,b)$.

6) Soient $a, b > 0$ pour lesquels $b \leqslant a$. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. On **ADMET** que ces suites sont bien définies et strictement positives.

a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $M(a,b)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I(u_n, v_n) = I(a,b)$.

c) En déduire que : $\quad I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$. Ainsi, en particulier : $\quad \omega = \frac{\pi}{3M\left(\sqrt{2},1\right)}$.

7) On conserve les notations de la question **6)**, mais dans le cas particulier où $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{(u_n - v_n)^2}{8}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant u_n - M\left(\sqrt{2},1\right) \leqslant 8\left(\frac{\sqrt{2}-1}{8}\right)^{2^n}$.

Les approximations de $M\left(\sqrt{2},1\right)$ obtenues sont d'une efficacité redoutable. Si on veut une valeur approchée de ce réel à 10^{-40} près, autrement dit si on veut connaître $M\left(\sqrt{2},1\right)$ avec 40 décimales exactes après la virgule, il est suffisant de calculer u_5. Et si on pousse le calcul jusqu'à u_{10}, on obtient plus de 1300 décimales exactes !