DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)** et **4)** sont indépendantes.

1) Simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^2}{2j+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

2) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = (n+1)\big(u_n + u_{n+1}\big)$. Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n}$. Que vaut : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$?

4) Montrer que toute fonction $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ peut être écrite d'une et une seule manière sous la forme :

$$x \longmapsto \lambda x + \mu\sqrt{1+x} + g(x)$$

où λ et μ sont des réels et où $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est une fonction pour laquelle : $g(0) = g'(0) = 0$.

---

2 On appelle *suite de Sylvester* la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $s_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k$.

1) a) Montrer que s_n est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que : $s_n \geqslant n+2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$, puis simplifier la différence $\displaystyle\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1}$.

c) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k}$, que l'on note aussi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{s_k}$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle u_n = \frac{\ln s_n}{2^{n+1}}$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

3) On pose à présent : $r = \sqrt[3]{2}$. Par définition, r est donc l'unique réel positif pour lequel : $r^3 = 2$.

a) Montrer grâce à la formule du binôme que : $\displaystyle\left(1 + \frac{5}{16}\right)^3 \geqslant 2$. Qu'en déduit-on sur r ?

b) En déduire que : $s_0 s_1 s_2 \geqslant r^{16}$.

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 3$: $s_n \geqslant r^{2^{n+1}}$.

Le résultat de la question **3)c)** montre, après passage à la limite, que : $\displaystyle\ell \geqslant \ln r = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,23104$. Cette minoration est particulièrement fine car en fait, ℓ vaut 0,23434 à 10^{-5} près.

3

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz : Soient $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ fixés. On souhaite prouver l'inégalité suivante :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_k^2} \qquad (\textit{inégalité de Cauchy-Schwarz}).$$

a) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas où : $a_0 = \ldots = a_n = 0$.

b) On suppose au contraire dans cette question qu'au moins l'un des réels $a_0, \ldots, a_n$ est non nul et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle S(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k x + b_k)^2$. Montrer que S est une fonction polynomiale de degré 2, puis montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Une pseudo-formule du binôme : Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k)$.

a) Compléter pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $(x)_{n+1} = \ldots \times (x)_n$.

On fixe à présent $x, y \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k \, (y)_{n-k} \quad \bigstar$.

b) Initialisation : Montrer que la relation $\bigstar$ est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la relation $\bigstar$ est vraie au rang n.

c) Montrer que : $(x+y)_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k \, (y)_{n-k} \, (x-k) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k \, (y)_{n-k} \, (y-n+k)$.

d) En déduire que la relation $\bigstar$ est vraie au rang $n+1$.

3) La formule de Vandermonde :

a) Compléter pour tous $n, k \in \mathbb{N}$: $(n)_k = \ldots \times \binom{n}{k}$.

b) En déduire, grâce à la relation $\bigstar$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (*formule de Vandermonde*).

4) Conclusion :

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$.

b) Montrer que pour tous $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: $\left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right| \leqslant 2^n \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}$.

On cherche pour finir à savoir si le facteur 2^n de l'inégalité de la question **b)** peut être remplacé par un facteur λ^n plus petit. On se donne à cette fin $\lambda > 0$ et on suppose que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: $\left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right| \leqslant \lambda^n \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}$.

c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$: $\frac{n!}{k!} \leqslant \frac{(2n-k)!}{n!}$.

d) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, 2n]\!]$: $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$, puis que : $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$.

e) En déduire que : $\lambda \geqslant 2$.