Devoir surveillé

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)** et **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Simplifier le plus possible la somme : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)}$ et le produit : $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=4^n(n+2)\,u_n$. Déterminer une expression explicite simple de u_n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

3) Simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ grâce à une technique de calcul développée en TD.

4) Montrer que toute fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ peut être écrite d'une et une seule manière sous la forme :

$$x\longmapsto ax+be^x+g(x)$$

où a et b sont des réels et où $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction pour laquelle : $g(0)=g(1)=0$.

---

2 On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles pour tout $n\in\mathbb{N}$: $x_{n+2}=3x_{n+1}-x_n$, puis α la plus grande solution de l'équation : $x^2-3x+1=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ et β la plus petite.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{E}$. Montrer que si x_0 et x_1 sont des entiers relatifs, x_n en est un aussi pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On note à présent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de $\mathscr{E}$ pour laquelle : $u_0=0$ et $u_1=1$ et on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\alpha^n+\beta^n$.

2) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in\mathbb{N}$ et $v_n\in\mathbb{N}$.

d) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, le couple (u_n,v_n) est solution de l'équation : $y^2=5x^2+4$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{N}^2$.

3) Montrer que pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\alpha}\right[$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_kx^k=\frac{x}{x^2-3x+1}$.

4) a) Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}^2=u_nu_{n+2}+1$.

c) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_ku_{k+1}}$.

---

3 On pose : $D=\left[0,\dfrac{1}{4}\right[$ et pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in D$: $\displaystyle S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}x^k$ et $\varphi_n(x)=S_n(x)\sqrt{1-4x}$.

On ADMET le théorème suivant jusqu'à la question **5)**, qui en propose une démonstration.

> **Théorème (Inégalité des accroissements finis)** Soient I un intervalle, $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction et $M\geqslant 0$. On suppose que f est dérivable sur I, que f' y est continue et que $|f'|$ y est majorée par M, i.e. que pour tout $t\in I$: $\left|f'(t)\right|\leqslant M$.
>
> Dans ces conditions, pour tous $a,b\in I$: $\left|f(b)-f(a)\right|\leqslant M|b-a|$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\dbinom{2n}{n}\leqslant 2^{2n}$.

2) Soit $q \in [0,1[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = nq^n$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle converge.

b) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Il est bien sûr interdit de répondre « par croissances comparées », il s'agit de le démontrer.

3) **a)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $(k+1)\binom{2k+2}{k+1} = (4k+2)\binom{2k}{k}$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$: $(1-4x)S_n'(x) = 2S_n(x) - (4n+2)\binom{2n}{n}x^n$.

c) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$: $\varphi_n'(x) = -(4n+2)\binom{2n}{n}\dfrac{x^n}{\sqrt{1-4x}}$.

d) Montrer que pour tout $x \in D$: $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n'(x) = 0$.

4) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$: $\left|\varphi_n(x) - 1\right| \leqslant -x\varphi_n'(x)$ en exploitant l'inégalité des accroissements finis.

b) En déduire la limite : $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ pour tout $x \in D$, qu'on note aussi : $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}x^k$.

5) **a)** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a \leqslant b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t \qquad (\textit{inégalité triangulaire}).$$

b) Démontrer l'inégalité des accroissements finis.

---

4 **(Difficile)** Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir **TRÈS BIEN RÉUSSI** tout le reste !

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 1$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|v_{n+1} - v_n| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
