Devoir surveillé

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)**, **4)** et **5)** suivantes sont indépendantes.

1) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} j$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^i j$.

2) Simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{(k+2)(n-k+1)}$ pour tout $n \geqslant 2$.

3) Déterminer — sans faire de récurrence — une expression explicite de la famille $(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ définie pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ par : $a_{i,0} = 1$ et $a_{i,j+1} = \dfrac{2}{j+1}\, a_{i+1,j}$.

4) On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \sqrt{u_n + u_{n+1} + 3}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 3 et croissante.

5) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y).$$

On pourra commencer par démontrer que pour une telle fonction f : $f'(x+y) = f'(x) + f'(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

---

2 On pose : $\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \right\}$, $\mathbb{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \right\}$ et $\widetilde{\mathbb{D}} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1 \right\}$.

On appelle *homographie* toute fonction de la forme $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c et d sont des nombres complexes pour lesquels $ad - bc \neq 0$.

1) Cette question est tout à fait indépendante des suivantes. On note f la fonction $z \longmapsto \mathrm{i}\,\dfrac{1+z}{1-z}$.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$: $\mathrm{Im}\big(f(z)\big) > 0$.

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$.

2) Avec les notations de la définition des homographies, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $|c|$ et $|d|$ l'homographie $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ est-elle définie sur $\widetilde{\mathbb{D}}$ tout entier ?

On ne s'intéressera désormais qu'à ce genre d'homographies et on considérera qu'elles ne sont définies **que** sur $\widetilde{\mathbb{D}}$. Par exemple, l'homographie $z \longmapsto \dfrac{1}{z-2}$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$, mais on ne s'intéressera qu'à sa restriction à $\widetilde{\mathbb{D}}$.

On note à présent $\mathscr{H}$ l'ensemble des homographies $h : \widetilde{\mathbb{D}} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{D}}$ définies sur $\widetilde{\mathbb{D}}$ et à valeurs dans $\widetilde{\mathbb{D}}$ pour lesquelles :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad h(z) \in \mathbb{D} \qquad \text{et} \qquad \forall u \in \mathbb{U}, \quad h(u) \in \mathbb{U}.$$

3) **a)** Montrer que pour tous $\delta, z \in \mathbb{C}$ pour lesquels $\overline{\delta} z \neq 1$: $\quad 1 - \left| \dfrac{z-\delta}{1-\overline{\delta}z} \right|^2 = \dfrac{\left(1-|\delta|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\overline{\delta}z\right|^2}$.

b) Montrer soigneusement que pour tout $\delta \in \mathbb{D}$, la fonction $z \overset{\varphi_\delta}{\longmapsto} \dfrac{z-\delta}{1-\overline{\delta}z}$ appartient à $\mathscr{H}$.

4) Soit $h \in \mathscr{H}$. On suppose de plus que $h(0) = 0$.

a) Montrer l'existence de deux nombres $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{D}$ pour lesquels pour tout $z \in \widetilde{\mathbb{D}}$: $\quad h(z) = \dfrac{\alpha z}{\beta z + 1}$.

b) Montrer que la fonction $u \longmapsto \mathrm{Re}(\beta u)$ est constante sur $\mathbb{U}$.

c) En déduire que $\beta = 0$ en faisant différents choix de nombres u dans le résultat de la question **b)**, puis que $\alpha \in \mathbb{U}$.

5) Montrer que la composée de deux éléments de $\mathscr{H}$ est encore un élément de $\mathscr{H}$.

6) Soit $h \in \mathscr{H}$.

a) Montrer que $\varphi_{h(0)} \circ h$ est de la forme $z \longmapsto uz$ pour un certain $u \in \mathbb{U}$.

b) En déduire que h est de la forme $z \longmapsto u\,\varphi_\delta(z)$ pour un certain $\delta \in \mathbb{D}$ à préciser.

Réciproquement, il n'est pas dur de se convaincre que la fonction $z \longmapsto u\,\varphi_\delta(z)$ appartient à $\mathscr{H}$ pour tous $u \in \mathbb{U}$ et $\delta \in \mathbb{D}$. On a donc obtenu une description explicite de l'ensemble $\mathscr{H}$.

3

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz : Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$.

a) Vérifier, en développant la somme de gauche, que : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(x_iy_j-x_jy_i\right)^2=2\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)-2\left(\sum_{k=1}^n x_ky_k\right)^2$.

b) En déduire que : $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^n x_ky_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$ (*inégalité de Cauchy-Schwarz*).

2) Premières applications :

a) Montrer que pour tous $a_1,\dots,a_n\geqslant 0$: $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^2}$.

b) Montrer que pour tous $\lambda_0,\dots,\lambda_n\geqslant 0$ et $x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_n\in\mathbb{R}$: $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^n \lambda_kx_ky_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=0}^n \lambda_kx_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=0}^n \lambda_ky_k^2}$.

3) Une majoration délicate : Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$ fixés. On pose : $\displaystyle\Delta_n(x)=\sum_{k=0}^n\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$.

On ADMET à présent l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^n k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2$ qui se démontre de manière analogue.

b) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$, puis vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^n\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{1}{4n}$.

c) Montrer enfin que : $\displaystyle\Delta_n(x)\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

D'après un certain *théorème d'approximation de Weierstrass*, toute fonction continue sur $[0,1]$ peut être approximée aussi finement qu'on le souhaite par des fonctions polynomiales. On peut démontrer ce théorème de bien des façons, mais l'une d'entre elles, classique, repose sur l'inégalité de la question **c)**.

4

(Difficile) Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir TRÈS BIEN RÉUSSI tout le reste !

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}$.

Déterminer une expression explicite simple de S_n pour tout $n\in\mathbb{N}$. On pourra commencer par transformer $2S_{n+1}$ grâce à la formule de Pascal.
