DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)** et **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^2}{j+1}$ et le produit $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i^2}{j+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n} \quad$ et $\quad v_n = \dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On peut montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, mais ce n'est pas trivial.

3) On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$: $\quad \left|z^2+z+1\right| = \left|2\mathrm{Re}(z)+1\right|$, puis que : $\quad \Big|\left|z^2+z+1\right| - 2\left|\mathrm{Re}(z)\right|\Big| \leqslant 1$.

4) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être écrite d'une et une seule manière sous la forme :

$$x \longmapsto ax^2 + bx + g(x)$$

où a et b sont des réels et où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction pour laquelle $g(1) = g(-1) = 0$.

2

1) Montrer, en développant la somme de gauche, que pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)(y_i-y_j) = n\sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k\right).$$

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a \leqslant b$ et $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$. On pose $s = \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k$.

a) Montrer que : $\quad \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)^2 + n\sum_{k=1}^n (b-x_k)(x_k-a) = (nb-s)(s-na)$.

b) Que vaut le maximum de la fonction $t \longmapsto (nb-t)(t-na)$? En déduire que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)^2 \leqslant \frac{n^2(b-a)^2}{2}$.

3) Soient $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}$. On souhaite prouver l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* : $\quad \displaystyle\left|\sum_{k=1}^p u_k v_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^p u_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^p v_k^2}$.

a) Montrer l'inégalité dans le cas où $u_1 = \ldots = u_p = 0$.

b) On suppose à présent que l'un des réels $u_1, \ldots, u_p$ est non nul et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad P(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^p (u_k t + v_k)^2$.
Montrer que la fonction P est polynomiale de degré 2 et calculer son discriminant, puis conclure.

4) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ des réels pour lesquels $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. Soient en outre $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de réels compris entre a et b et une $(y_1, \ldots, y_n)$ une famille de réels compris entre c et d.

On pose $\Delta = n\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k\right)$.

a) Montrer que $\Delta = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)(y_i-y_j)$.

b) Que dire de Δ si les familles $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont croissantes ?

c) Montrer que $|\Delta| \leqslant \dfrac{n^2(b-a)(d-c)}{4}$.

5) Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k$.

a) Montrer que : $\quad \displaystyle\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{S-a_k}\right) = n + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{S-a_k}$.

b) En déduire, grâce au résultat de la question **4)b)**, que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{S-a_k} \geqslant \frac{n}{n-1}$.

---

3 On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $\mathscr{P} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \quad \mathrm{Im}(z) > 0\right\}$ et on pose $\mathscr{B} = \left\{z \in \mathscr{P} \mid \quad |z| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{Re}(z)\right| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

1) Représenter graphiquement $\mathscr{B}$ à main levée.

2) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ quatre entiers pour lesquels $ad - bc = 1$. On note f la fonction $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

a) Vérifier que f est bien définie sur $\mathscr{P}$.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathscr{P}$: $\quad \mathrm{Im}\big(f(z)\big) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$. En déduire que f est à valeurs dans $\mathscr{P}$.

c) Montrer que pour tout $z \in \mathscr{P}$ pour lequel $\mathrm{Im}\big(f(z)\big) \geqslant \mathrm{Im}(z)$: $\quad |c| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} \quad \text{et} \quad |d| \leqslant 1 + \frac{|z|}{\mathrm{Im}(z)}$. On pourra s'intéresser à $\mathrm{Im}(cz+d)$.

On appelle *homographie de $\mathscr{P}$* toute fonction de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ de la forme $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ sont des entiers pour lesquels $ad - bc = 1$. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des homographies de $\mathscr{P}$.

Attention, les homographies de $\mathscr{P}$ admettent par définition $\mathscr{P}$ pour ensemble de définition. On peut bien sûr définir la fonction $z \longmapsto \frac{z+1}{z-2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ tout entier, mais c'est seulement sa restriction à $\mathscr{P}$ qu'on appelle une homographie de $\mathscr{P}$.

3) a) Vérifier que la fonction $z \overset{g}{\longmapsto} -\frac{1}{z}$ est une homographie de $\mathscr{P}$.

b) Montrer l'existence d'un nombre complexe ω pour lequel pour tout $z \in \mathscr{P}$: $\quad \mathrm{Re}\big(g(z)\big) \leqslant \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad |z - \omega| \geqslant 1$.

On pose à présent $\mathscr{G} = \left\{z \in \mathscr{P} \mid \quad g(z) \in \mathscr{B}\right\}$.

c) Montrer que $\mathscr{G} = \left\{z \in \mathscr{P} \mid \quad |z| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |z-1| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |z+1| \geqslant 1\right\}$, puis représenter graphiquement $\mathscr{G}$ à main levée.

4) Montrer que la composée de deux homographies de $\mathscr{P}$ est encore une homographie de $\mathscr{P}$.

5) Écrire formellement avec des quantificateurs la proposition « Tout élément de $\mathscr{P}$ peut être envoyé dans $\mathscr{B}$ par une homographie de $\mathscr{P}$ ». La fin du problème est consacré à la démonstration de cette proposition.

On se donne pour finir une fois pour toutes un élément z_0 de $\mathscr{P}$ et on pose $\mathscr{Z}_0 = \left\{h(z_0) \mid \quad h \in \mathscr{H}\right\}$.

6) a) Montrer que pour tous $z \in \mathscr{Z}_0$ et $h \in \mathscr{H}$: $\quad h(z) \in \mathscr{Z}_0$.

b) En déduire que pour tous $z \in \mathscr{Z}_0$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\quad z + n \in \mathscr{Z}_0$.

7) a) Montrer grâce au résultat de la question **2)c)** que l'ensemble $\left\{\mathrm{Im}(z) \mid \quad z \in \mathscr{Z}_0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \geqslant \mathrm{Im}(z_0)\right\}$ est fini.

Fini, cet ensemble possède un plus grand élément m qu'on peut écrire $m = \mathrm{Im}(z_m)$ pour un certain $z_m \in \mathscr{Z}_0$ pour lequel $\mathrm{Im}(z_m) \geqslant \mathrm{Im}(z_0)$.

b) Pourquoi peut-on choisir z_m de telle sorte que $\left|\mathrm{Re}(z_m)\right| \leqslant \frac{1}{2}$?

c) Montrer que pour tout $z \in \mathscr{Z}_0$: $\quad \mathrm{Im}(z) \leqslant \mathrm{Im}(z_m)$, $\quad$ puis que $z_m \in \mathscr{B}$.
