Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **6)** suivantes sont indépendantes.

1) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$ et le produit $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 16^{ij}$.

2) **a)** Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+x} \geqslant 1 + \dfrac{x}{3}$ d'inconnue $x \in [-1, +\infty[$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{3(n+1)}$.

c) En déduire un réel $\lambda > 0$ pour lequel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \dfrac{\lambda}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.

d) En déduire que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3) Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2^n\,(n+1)}{n+3}\, u_n$. Une démonstration rigoureuse du résultat est attendue.

4) Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ pour lesquels les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{z}{z - \mathrm{i}}$ sont égales.

5) On note P la fonction polynomiale $x \longmapsto \left(x^2 - x + 4\right)^2 + 4$ sur $\mathbb{R}$.

a) Résoudre l'équation $z^2 - z + 4 + 2\mathrm{i} = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

b) Résoudre l'équation $\left(z^2 - z + 4\right)^2 + 4 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

c) En déduire quatre réels a, b, c, d pour lesquels pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad P(x) = \left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + cx + d\right)$.

6) Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

---

2 On rappelle que $\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 1 \right\}$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que $\mathbb{U}$ est *stable par f* si $f(u) \in \mathbb{U}$ pour tout $u \in \mathbb{U}$.

1) **Préliminaires :**

a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad |a+b|^2 = |a|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(a\overline{b}\right) + |b|^2$.

b) Exprimer $|a+b|^2 + |a-b|^2$ en fonction de $|a|$ et $|b|$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que la fonction $u \longmapsto \mathrm{Re}(uz)$ est constante sur $\mathbb{U}$. Montrer que $z = 0$ en exploitant différentes valeurs de u.

2) **Polynômes de degré 1 :** Montrer que les couples $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ pour lesquels $\mathbb{U}$ est stable par la fonction $z \longmapsto az + b$ sont exactement les couples $(a, 0)$, a décrivant $\mathbb{U}$.

3) **Polynômes de degré 2 :** Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. On suppose que $\mathbb{U}$ est stable par la fonction $z \longmapsto az^2 + bz + c$.

a) Montrer, grâce au résultat de la question **1)b)**, que pour tout $u \in \mathbb{U}$: $\quad \left|au^2 + c\right|^2 + |b|^2 = 1$.

b) En déduire que la fonction $u \longmapsto \mathrm{Re}\left(ua\overline{c}\right)$ est constante sur $\mathbb{U}$.

c) En déduire que $\mathbb{U}$ est stable par la fonction $z \longmapsto az + b$.

d) Quels sont finalement les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ pour lesquels $\mathbb{U}$ est stable par la fonction $z \longmapsto az^2 + bz + c$?

3

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz : Soient $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^n b_k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k b_k$.

b) En déduite l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* : $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^n a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}$.

2) Une pseudo-formule du binôme : Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (x-k)$.

a) Compléter pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $(x)_{n+1} = \ldots \times (x)_n$.

On fixe à présent $x, y \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle(x+y)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k \, (y)_{n-k} \qquad \bigstar$.

b) Initialisation : Montrer que la relation $\bigstar$ est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la relation $\bigstar$ est vraie au rang n.

c) Montrer que : $\displaystyle(x+y)_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k \, (y)_{n-k} \, (x-k) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k \, (y)_{n-k} \, (y-n+k)$.

d) En déduire que la relation $\bigstar$ est vraie au rang $n+1$.

3) La formule de Vandermonde :

a) Compléter pour tous $n, k \in \mathbb{N}$: $(n)_k = \ldots \times \dbinom{n}{k}$.

b) En déduire, grâce à la relation $\bigstar$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (*formule de Vandermonde*).

4) Conclusion :

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dbinom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$.

b) En déduire que pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k\right| \leqslant 2^n \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}$.

c) Pour finir, soit $\lambda > 0$. On suppose que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k\right| \leqslant \lambda^n \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}$. Montrer que $\lambda \geqslant 2$. Que signifie ce résultat ?