DEVOIR SURVEILLÉ

1 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$ et le produit : $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} 16^{ij}$.

2

1) a) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$: $(2k-1)(2k) \geqslant 4k\sqrt{k(k-1)}$.

b) En déduire une minoration de $(2n)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis l'inégalité : $\displaystyle\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}}$.

2) On veut montrer à présent que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{2n}{n} \leqslant \frac{2^{2n}}{\sqrt{3n}}$. On va même montrer un peu mieux.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\frac{2n+1}{\sqrt{3n+1}} \leqslant \frac{2n+2}{\sqrt{3n+4}}$.

b) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rapport : $\dfrac{\dbinom{2n+2}{n+1}}{\dbinom{2n}{n}}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\binom{2n}{n} \leqslant \frac{2^{2n}}{\sqrt{3n+1}}$.

En résumé, le réel $\displaystyle\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ est compris entre $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cet encadrement est de bonne qualité, mais nous irons beaucoup plus loin en fin d'année en démontrant la *formule de Wallis*, selon laquelle : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

---

3 On appelle *suite de Fibonacci* la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

On pose pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F_k x^k$.

1) Montrer SANS récurrence, mais en procédant à des changements d'indice, que pour tous $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(1-x-x^2\right)S_n(x) = x - F_{n+1}x^{n+1} - F_n x^{n+2}.$$

2) Montrer que la fonction polynomiale $x \longmapsto x^2 - x - 1$ possède une unique racine strictement positive φ et que son autre racine vaut $1-\varphi$.

3) On va montrer par analyse-synthèse la proposition suivante : $\exists\,!\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad F_n = \lambda\varphi^n + \mu(1-\varphi)^n$.

a) Analyse : Montrer que si le résultat est vrai : $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

b) Synthèse : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (1-\varphi)^n\right)$.

4) Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi}\right[$ fixé.

a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n x^n = 0$.

b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$, limite que l'on note aussi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} F_k x^k = \frac{x}{1-x-x^2}$.

4

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ fixés. On souhaite établir l'importante *inégalité de Cauchy-Schwarz*, selon laquelle :

$$\left|\sum_{k=0}^n a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}.$$

a) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas où : $a_0 = \ldots = a_n = 0$.

b) On suppose au contraire dans cette question qu'au moins l'un des réels $a_0, \ldots, a_n$ est non nul et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \sum_{k=0}^n (a_k x + b_k)^2$. Montrer que S est une fonction polynomiale de degré 2 et calculer son discriminant. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Une première application : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$ fixés.

a) Montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

On ADMETTRA l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^n k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$, qui se démontre de manière analogue.

b) Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$, puis montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^n \left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

c) En déduire l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^n \left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n}$.

d) On pose : $\displaystyle\Delta(x) = \sum_{k=0}^n \left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

Montrer, en appliquant convenablement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que : $\displaystyle\Delta(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

L'inégalité ainsi obtenue paraît mystérieuse au premier abord et sans intérêt. Je vous expliquerai rapidement à l'oral en quoi, au contraire, elle est porteuse d'un important résultat, le *théorème d'approximation de Weierstrass*.

3) Une deuxième application : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n > 0$ fixés.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\displaystyle\sum_{p=1}^k a_p \times \sum_{p=1}^k \frac{p^2}{a_p} \geqslant \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

b) En déduire l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1+\ldots+a_k} \leqslant 4\sum_{p=1}^n \frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$.

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.

d) En déduire l'*inégalité de Hardy* : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1+\ldots+a_k} \leqslant 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$.

---

5 **(Difficile)** Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir TRÈS BIEN RÉUSSI tout le reste !

Que vaut l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$? En déduire que pour tous $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geqslant 0$.
