Devoir surveillé

1 Simplifier le plus possible la somme : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i^2}{j+1}$ et le produit : $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i^2}{j+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2

1) Résoudre l'inéquation : $\sqrt{1+x}\geqslant 1+\dfrac{x}{3}$ d'inconnue $x\in[-1,+\infty[$.

2) a) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\geqslant 1+\dfrac{1}{3(n+1)}$.

b) En déduire par équivalence une minoration de : $\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}\leqslant 4-\frac{3}{\sqrt{n}}$.

---

3 On rappelle que toute suite croissante majorée converge et que toute suite décroissante minorée converge (*théorème de la limite monotone*).

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est un entier supérieur ou égal à n.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $r_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2) a) Montrer que pour tous $a,c\in\mathbb{R}$ et $b,d>0$, $\dfrac{2a+c}{2b+d}$ est compris entre $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$. On pourra distinguer les cas : $\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{c}{d}<\dfrac{a}{b}$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $r_{2n-1}\leqslant r_{2n+1}\leqslant r_{2n+2}\leqslant r_{2n}$.

c) En déduire que les suites $(r_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

On pose : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}r_{2n-1}$ et $\ell'=\lim\limits_{n\to+\infty}r_{2n}$.

3) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}^2-u_nu_{n+2}=(-1)^n$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $|r_{n+1}-r_n|\leqslant\dfrac{1}{n(n+1)}$.

c) En déduire l'égalité : $\ell=\ell'$.

En résumé, les suites $(r_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers un même réel $\ell=\ell'$. On **ADMET** que dans ces conditions, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même converge vers $\ell=\ell'$. Ce résultat sera démontré plus tard dans l'année.

4) a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Montrer l'égalité : $\ell^2-2\ell-1=0$, puis en déduire ℓ.

5) Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{u_ku_{k+1}}$, que l'on note aussi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{u_ku_{k+1}}$.

On note à présent α la plus grande racine du polynôme X^2-2X-1 et β la plus petite.

6) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{2}}$.

b) En déduire un nouveau calcul de la limite : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}r_n$.

---

4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geqslant 1 + x$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$: $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leqslant e^{-k}$.

c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{p} e^{-k} \leqslant \frac{e}{e-1}$ et calculer : $\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} e^{-k}$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leqslant \frac{e}{e-1}$.

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$: $0 \leqslant e^{-x} - 1 + x \leqslant \frac{x^2}{2}$. On pourra notamment dériver deux fois la fonction $x \longmapsto e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire, grâce à la formule « $a^n - b^n$ », que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$: $0 \leqslant e^{-nx} - (1-x)^n \leqslant \frac{nx^2}{2}\, e^{-(n-1)x}$.

c) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$: $0 \leqslant e^{-k} - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leqslant \frac{e}{2n}\, k^2 e^{-k}$.

3) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $k^2 \leqslant 2^{k+1}$.

b) En déduire l'égalité : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{e}{e-1}$.

---

5 **(Difficile)** Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir TRÈS BIEN RÉUSSI tout le reste !

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 1$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|v_{n+1} - v_n| \leqslant \frac{1}{2}$.
