Devoir surveillé

1 Les questions **1)**, **2)** et **3)** sont indépendantes.

1) Calculer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \ln\left(2+\mathrm{e}^{3x}\right)$.

2) Déterminer un équivalent simple de : $\binom{n}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) On note f la fonction $x \longmapsto \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Simplifier : $f(x)+f(-x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Qu'en déduit-on sur le coefficient d'ordre 2 des développements limités de f au voisinage de 0 ?

b) Étudier localement f au voisinage de 0. On précisera la position du graphe de f par rapport à sa tangente.

2

1) Montrer que pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ — que l'on précisera — pour lequel : $P(-1)=a$, $P(0)=b$, $P(1)=c$ et $P'(0)=d$.

2) Soit $f \in \mathscr{C}^4\left([-1,1],\mathbb{R}\right)$. On note P_f l'unique polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ pour lequel : $P(-1)=f(-1)$, $P(0)=f(0)$, $P(1)=f(1)$ et $P'(0)=f'(0)$.

Soit $x \in \left]0,1\right[$. Ce réel x est **fixé** dans les questions **a)**, **b)** et **c)**. On pose : $A = \frac{f(x)-P_f(x)}{x^2\left(x^2-1\right)}$ et pour tout $t \in [-1,1]$: $\delta(t) = f(t) - P_f(t) - At^2\left(t^2-1\right)$.

a) En quels points est-il clair à l'avance que δ et δ' s'annulent ?

b) Montrer que $\delta^{(4)}$ s'annule au moins une fois dans $[-1,1]$.

c) En déduire l'inégalité : $\left|f(x)-P_f(x)\right| \leqslant \frac{x^2\left(1-x^2\right)}{24} \sup_{[-1,1]} \left|f^{(4)}\right|$. On justifiera l'existence de la borne supérieure.

On **admet** que le résultat de la question **c)** est valable pour tout $x \in [-1,1]$, et pas seulement pour $x \in \left]0,1\right[$.

d) Calculer : $\int_{-1}^{1} x^2\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x$, puis montrer que : $\int_{-1}^{1} P_f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}$.

e) En déduire l'inégalité : $\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}\right| \leqslant \frac{1}{90} \sup_{[-1,1]} \left|f^{(4)}\right|$.

f) Montrer que l'inégalité de la question **e)** est une égalité si l'on choisit pour fonction f la fonction $x \longmapsto x^4$. Le coefficient $\frac{1}{90}$ est donc optimal.

3) Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec : $a<b$ et $f \in \mathscr{C}^4\left([a,b],\mathbb{R}\right)$.

a) Trouver une fonction affine croissante bijective de $[-1,1]$ sur $[a,b]$.

b) Montrer l'inégalité : $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880} \sup_{[a,b]} \left|f^{(4)}\right|$.

4) Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec : $a<b$, $f \in \mathscr{C}^4\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$, on pose : $x_k = a + k\,\frac{b-a}{2n}$.

Montrer l'inégalité : $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(x_{2k}\right)+4f\left(x_{2k+1}\right)+f\left(x_{2k+2}\right)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4} \sup_{[a,b]} \left|f^{(4)}\right|$.

Le résultat de la question **4)** donne une approximation de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par une certaine moyenne de valeurs de f, satisfaisante en vertu du facteur $\frac{1}{n^4}$. C'est souvent grâce à cette *méthode de Simpson* que les calculatrices calculent les intégrales.

---

3 Dans tout ce problème, I est un intervalle non vide et $q \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 : $y'' + qy = 0$, dite *de Sturm-Liouville* et qu'on notera $\bigstar$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.

On **ADMET** le théorème d'**EXISTENCE** et **UNICITÉ** suivant, étudié en deuxième année.

Théorème (Un cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz) Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution d'$\bigstar$ y qui satisfait le problème de Cauchy : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$.

On s'intéresse plus précisément dans ce problème aux zéros des solutions d'$\bigstar$.

1) Soient $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose f positive ou nulle et f'' négative ou nulle sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tous $a, x \in \mathbb{R}$: $f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.

b) En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

2) Dans cette question : $I = \mathbb{R}$ et on suppose q positive ou nulle mais non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Soit y une solution d'$\bigstar$. Montrer, en exploitant le résultat de la question **1)**, que y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

On suppose dans les questions **3)** et **4)** que : $I = \mathbb{R}_+$ et que q est minorée sur $\mathbb{R}_+$ par un certain $m > 0$. Soit en outre y une solution d'$\bigstar$ non identiquement nulle.

3) On note φ la fonction $y + \mathrm{i}y'$ à valeurs complexes.

a) Montrer, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, que φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

On peut ainsi noter L la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t$ à valeurs complexes.

b) Montrer que la fonction $x \longmapsto \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-L(x)}$ est constante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire l'existence d'une fonction strictement positive $r \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et d'une fonction $\theta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour lesquelles : $y = r\cos\theta$ et $y' = r\sin\theta$.

c) Montrer, après avoir dérivé les deux relations de la question **b)**, que : $q\cos^2\theta + \sin^2\theta = -\theta'$.

d) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $m\cos^2 t + \sin^2 t \geqslant \min\{1, m\}$, puis que cette inégalité est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

e) En déduire que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \theta(x) = -\infty$.

f) En déduire que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

4) Soit $a \geqslant 0$. On pose : $b = a + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$ et on note f la fonction $x \longmapsto \sin\big((x-a)\sqrt{m}\big)$ sur $\mathbb{R}_+$.

a) Quelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple la fonction f satisfait-elle ? Déterminer par ailleurs le signe de $f'(a)$ et $f'(b)$.

b) On suppose dans cette question que y ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que la fonction $W = yf' - y'f$ est monotone sur $[a, b]$, puis que : $y(a) = y(b) = 0$.

On vient de montrer que y s'annule forcément sur $[a, b[$ ou $]a, b]$, donc sur tout intervalle semi-ouvert de longueur $\dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$. Cela redémontre en passant le résultat de la question **3)f)**.

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, y possède au moins $\left\lfloor \dfrac{x\sqrt{m}}{\pi} \right\rfloor$ zéros dans l'intervalle $[0, x[$.

5) Dans cette question, I est de nouveau un intervalle non vide quelconque et q une fonction continue quelconque. Soit y une solution d'$\bigstar$ non identiquement nulle.

a) Montrer que pour tout zéro $z \in I$ de y : $y'(z) \neq 0$. En déduire que y ne s'annule qu'en z au voisinage de z.

b) Soient $a, b \in I$ avec : $a < b$. On suppose par l'absurde que le segment $[a, b]$ contient une infinité de zéros de y. On peut alors se donner une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros distincts de y. Obtenir une contradiction.

Les éventuels zéros d'une solution d'$\bigstar$ non identiquement nulle sont par conséquent toujours isolés les uns des autres et en nombre fini dans tout segment. On peut les ranger dans l'ordre croissant et parler de zéros consécutifs, i.e. de zéros entre lesquels ne se trouve aucun autre zéro.