DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **4)** suivantes sont indépendantes.

1) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-\cos(2x)}{x(\mathrm{e}^x-1)}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Étudier localement f au voisinage de 0 (prolongement par continuité, dérivabilité, position relative du graphe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0).

2) Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

3) Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de : $\left\lfloor n^{\frac{n+1}{n}}\right\rfloor \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt[4]{n^2+4n}-\sqrt{n}}{n^\alpha}\right)$.
À quelle condition nécessaire et suffisante sur α cette quantité admet-elle 0 pour limite lorsque n tend vers $+\infty$?

4) Montrer que la fonction $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \dfrac{\pi-x}{\sin x}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est bornée sur $]0,\pi[$.

---

2 Soit $f \in \mathscr{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que : $f(0)=f'(0)=f(1)=0$.

1) Justifier l'existence des réels : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]}|f|$ et $\|f''\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]}|f''|$ et d'un réel $a \in]0,1[$ pour lequel $\|f\|_\infty = \big|f(a)\big|$. Que vaut $f'(a)$?

2) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $\big|f'(x)\big| \leqslant \|f''\|_\infty \min\big\{x, |x-a|\big\}$.

3) Montrer que : $\displaystyle\int_0^a \min\big\{t,|t-a|\big\}\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}$, puis que : $\big|f(a)\big| \leqslant \dfrac{a^2}{4}\,\|f''\|_\infty$.

4) Montrer de même que : $\big|f(a)\big| \leqslant \dfrac{(1-a)^2}{2}\,\|f''\|_\infty$ en travaillant sur l'intervalle $[a,1]$.

5) Déduire du résultat des questions **3)** et **4)** que : $\|f\|_\infty \leqslant \left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\|f''\|_\infty$.

---

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des *polynômes trigonométriques réels de degré inférieur ou égal à n*, i.e. des fonctions de la forme $x \longmapsto a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^n \big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\big)$, $a_0,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ décrivant $\mathbb{R}$.

1) a) Montrer que $\mathscr{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{P}_n$ est stable par dérivation et par translation, i.e. que pour tous $f \in \mathscr{P}_n$ et $m \in \mathbb{R}$:

$$f' \in \mathscr{P}_n \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto f(x+m) \in \mathscr{P}_n.$$

c) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{P}_n$, il existe un (vrai) polynôme $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ pour lequel pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}P\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big).$$

2) Soit $f \in \mathscr{P}_n$.

a) Justifier l'existence des réels : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}}|f|$ et $\|f'\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}}|f'|$ et montrer que $|f'|$ possède un maximum sur $\mathbb{R}$.

On note alors m un réel en lequel $|f'|$ atteint son maximum et φ la fonction $x \longmapsto f'(m)\sin(nx) - n\,f(x+m)$.

On fait l'hypothèse que : $\|f'\|_\infty > n\,\|f\|_\infty$.

b) Montrer que : $\varphi'(0) = \varphi'(2\pi) = \varphi''(0) = 0$.

c) Montrer que φ s'annule sur $\left]\dfrac{(2k-1)\pi}{2n},\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

d) En déduire que φ s'annule au moins $2n$ fois sur $[0,2\pi[$, puis que φ'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0,2\pi[$.

e) Justifier l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ pour lequel pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi''(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} Q\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big)$.

f) En déduire que φ est la fonction nulle.

g) Dénicher une contradiction.

On a ainsi démontré l'*inégalité de Bernstein* suivante : $\|f'\|_\infty \leqslant n\,\|f\|_\infty$, valable pour toute fonction $f \in \mathscr{P}_n$.

On se donne à présent $P \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé une fois pour toutes. On ADMET que les réels : $\|P\|_{\infty,[-1,1]} = \sup\limits_{[-1,1]} |P|$ et $\|P'\|_{\infty,[-1,1]} = \sup\limits_{[-1,1]} |P'|$ sont bien définis. On souhaite prouver l'inégalité suivante.

Théorème (Inégalité de Markov) $\|P'\|_{\infty,[-1,1]} \leqslant n^2\,\|P\|_{\infty,[-1,1]}$.

On ADMET de même que le réel : $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \big|P'(\cos x)\sin x\big|$ est bien défini. On ADMET enfin, pour gagner du temps, que la fonction $x \longmapsto P(\cos x)$ appartient à $\mathscr{P}_n$

3) Montrer que : $M \leqslant n\,\|P\|_{\infty,[-1,1]}$.

L'inégalité de Markov sera donc démontrée si on prouve que pour tout $x \in [0,\pi]$: $\big|P'(\cos x)\big| \leqslant Mn$.

4) a) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$: $\sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{2n},\dfrac{(2n-1)\pi}{2n}\right]$: $\big|P'(\cos x)\big| \leqslant Mn$.

On note à présent $T_n(X)$ le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev*. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $T_n(\cos x) = \cos(nx)$, que : $\deg(T_n) = n$ et que si on pose : $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, alors : $T_n(X) = 2^{n-1}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\big(X-\cos\theta_k\big)$.

5) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\big|\sin(nx)\big| \leqslant n\,|\sin x|$.

b) En déduire que n^2 majore $|T_n'|$ sur $[-1,1]$, puis que : $\|T_n'\|_{\infty,[-1,1]} = n^2$.

c) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$: $T_n'(\cos\theta_k) = \dfrac{(-1)^k n}{\sin\theta_k}$.

6) On note à présent $L_0,\dots,L_{n-1}$ les polynômes de Lagrange de $\cos\theta_0,\dots,\cos\theta_{n-1}$.

a) Montrer que : $P'(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P'(\cos\theta_k)\,L_k(X)$ et $T_n'(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} T_n'(\cos\theta_k)\,L_k(X)$.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$: $T_n(X) = T_n'(\cos\theta_k)\,\big(X-\cos\theta_k\big)L_k(X)$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,\pi] \setminus \big\{\theta_0,\dots,\theta_{n-1}\big\}$:

$$P'(\cos x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\cos(nx)}{\cos x-\cos\theta_k}\,P'(\cos\theta_k)\sin\theta_k$$

et

$$T_n'(\cos x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(nx)}{\cos x-\cos\theta_k}.$$

d) Montrer enfin que pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2n}\right[\cup \left]\dfrac{(2n-1)\pi}{2n},\pi\right]$: $\big|P'(\cos x)\big| \leqslant Mn$.
