Devoir surveillé

1 Une urne contient initialement une seule boule de numéro 0 et on effectue n lancers d'une pièce équilibrée. On ajoute une boule dans l'urne après chaque face obtenue, la première fois de numéro 1, la deuxième fois de numéro 2... mais la première fois qu'on obtient pile — si cela arrive — on tire une boule au hasard.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k le résultat du $k^{\text{ème}}$ lancer : $X_k = \begin{cases} \text{F} & \text{si on a obtenu face} \\ \text{P} & \text{si on a obtenu pile.} \end{cases}$

Si on obtient au moins une fois pile, on note T le numéro du premier lancer au cours duquel c'est arrivé et N le numéro de la boule tirée. Si au contraire on n'obtient jamais pile, on pose : $T = N = +\infty$.

1) Déterminer la loi de T.

2) Quelle est la loi de N sachant $\{T = t\}$ pour tout $t \in [\![1, n]\!]$? En déduire la loi de N.

3) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$: $\displaystyle \left| \ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{n+1}$.

b) En déduire que : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} P(N = 0) = \ln 2$.

---

2 On se propose de calculer de deux manières différentes la limite : $\displaystyle I = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$, qu'on note aussi $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ et qu'on appelle l'*intégrale de Dirichlet*. Les questions **1)** et **2)** sont tout à fait indépendantes des questions **3)** et **4)**.

1) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \,]0, \pi[$: $\displaystyle 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}$.

b) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence de l'intégrale : $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\, \mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

2) **a)** Montrer que pour tout $f \in \mathscr{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$: $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, \sin(nt)\, \mathrm{d}t = 0$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*).

b) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t - t}{t \sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tout entier.

c) En déduire la limite : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\, \mathrm{d}t$.

d) En déduire l'existence de I et déterminer sa valeur.

Pour un deuxième calcul de I, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle \varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\, \mathrm{d}t$.

3) Montrer que : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}} \mathrm{e}^{-x \cos t}\, \mathrm{d}t = 0$, puis que : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

4) **a)** Montrer que pour tous $h \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{U}$: $\displaystyle \left| \mathrm{e}^{hu} - 1 - hu \right| \leqslant \frac{h^2}{2}\, \mathrm{e}^{|h|}$.

b) En déduire, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, l'existence d'un réel A indépendant de h pour lequel :

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant A\, |h| \mathrm{e}^{|h|}.$$

c) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\displaystyle \varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{i}x}$.

d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle \mathrm{Re}\big(\varphi(x)\big) = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$.

e) Retrouver ainsi le résultat de la question **2)d)**.

---

3 Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et de même loi uniforme sur $\{0,1,2\}$. On pose : $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.

1) Calculer $P(S_n=0)$, $P(S_n=1)$ et $P(S_n=2)$.

2) On pose pour tout $i\in[\![1,n]\!]$: $X_i'=2-X_i$ et $S_n'=\sum_{i=1}^n X_i'$.

a) Déterminer la loi de X_i' pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

b) Montrer que $X_1',\dots,X_n'$ sont indépendantes.

c) Montrer que S_n' et S_n ont la même loi.

3) **a)** Montrer par un argument combinatoire que pour tout $k\in\mathbb{N}$: $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}=\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}$.

b) Montrer que : $P(S_n=n)=\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$.

c) Montrer par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}$: $\binom{2k}{k}\leqslant\frac{2^{2k}}{\sqrt{2k+1}}$.

d) En déduire que : $P(S_n=n)\leqslant\frac{1}{3^n\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^n\binom{n+1}{2k+1}2^{2k}$.

e) En déduire que : $P(S_n=n)\leqslant\frac{3}{2\sqrt{n}}$.

f) Montrer enfin que : $\lim_{n\to+\infty}P(S_n\leqslant n)=\frac{1}{2}$.