DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **5)** suivantes sont indépendantes.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit successivement deux entiers au hasard X et Y dans $[\![1, 2n]\!]$. Avec quelle probabilité l'un des deux au moins est-il pair ?

2) Soit E un ensemble fini de cardinal $2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il de familles $(A_1, \ldots, A_n)$ de parties de cardinal 2 de E pour lesquelles $E = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$? Le résultat final simplifié est très simple !

3) Soient $n \geqslant 3$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé fini. On suppose que $X \sim \mathscr{U}\big([\![1, n]\!]\big)$ et $Y \sim \mathscr{U}\big(\{-1, 1\}\big)$. Déterminer la loi de $X + Y$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien l'ensemble $[\![1, 3n]\!]$ possède-t-il de parties autant d'entiers divisibles par 3 que d'entiers qui ne le sont pas ? On donnera le résultat sous forme simplifiée, sans symbole $\sum$ notamment.

5) Calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $\dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

2 Soient $X_0, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P). On fait l'hypothèse que :

— X_0 est constante de valeur 0,

— pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\quad P(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1) = 0$,

— pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la loi conditionnelle de X_{k+1} sachant que $X_k = 0$ est la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$,

— la famille $(X_0, \ldots, X_n)$ possède la *propriété de Markov* :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \forall x_0, \ldots, x_{k+1} \in \{0, 1\}, \quad P(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_0 = x_0,\ \ldots,\ X_k = x_k) = P(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k).$$

S'il existe, on note T le plus petit entier $k \in [\![1, n]\!]$ pour lequel $X_k = 1$, et si au contraire $X_1 = \ldots = X_n = 0$, on pose $T = +\infty$.

On note enfin N le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels $X_k = 1$.

Merci de respecter scrupuleusement le cadre de travail ainsi arrêté dans les questions qui suivent.

1) Que signifie la propriété de Markov ?

2) Déterminer la loi de X_1, puis calculer $P(X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1)$ et $P(X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0)$.

3) Calculer $P(N = 0)$.

4) Déterminer la loi de T.

5) Déterminer, au moyen d'une relation de récurrence, une expression explicite de $P(X_k = 1)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

6) **a)** Calculer $P(N = 1,\ X_k = 1)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On distinguera les cas $k < n$ et $k = n$.

b) En déduire $P(N = 1)$.

7) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

a) Montrer qu'il existe $\dbinom{n-k}{k}$ n-listes de $\{0, 1\}$ qui contiennent k fois l'entier 1 mais jamais deux 1 consécutifs et qui finissent par 0. Que vaut $P(X_1 = \varepsilon_1,\ \ldots,\ X_n = \varepsilon_n)$ pour une telle liste $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$?

b) Calculer $P(N = k)$.

---

3 On se propose de montrer de deux manières que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. Cette limite porte un nom, on l'appelle l'*intégrale de Dirichlet*. Les questions **1)** et **2)** sont tout à fait indépendantes des questions **3)** et **4)**.

1) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,\pi[$: $\displaystyle 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikt} = \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}$.

b) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)\,t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que cette intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

2) a) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\mathbb{R}\right)$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t - t}{t \sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tout entier.

c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)\,t\big)}{t}\,\mathrm{d}t$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Pour un deuxième calcul de I, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\,\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t$.

3) a) Que vaut $|\mathrm{e}^z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\cos t}\,\mathrm{d}t = 0$. **c)** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}} \mathrm{e}^{-x\cos t}\,\mathrm{d}t = 0$.

d) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

4) a) Montrer que pour tous $h \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{U}$: $\left|\mathrm{e}^{hu} - 1 - hu\right| \leqslant \dfrac{h^2}{2}\,\mathrm{e}^{|h|}$. On pourra s'intéresser à la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{tu}$.

b) En déduire, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, l'existence d'un réel A indépendant de h pour lequel :

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{it - x\,\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant A|h|\,\mathrm{e}^{|h|}.$$

c) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\varphi'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-ix} - \mathrm{e}^{-x}}{ix}$.

d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\mathrm{Re}\big(\varphi(x)\big) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et retrouver ainsi l'intégrale de Dirichlet.