DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **3)** suivantes sont indépendantes.

1) Calculer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

2) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x+\operatorname{sh} x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

a) Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbb{R}$ tout entier.

b) Étudier localement f au voisinage de 0 (position relative du graphe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0).

3) Déterminer un équivalent simple de : $\dbinom{n}{2}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}-\dfrac{\ln n}{\sqrt{n+1}}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2

1) L'égalité de Taylor-Lagrange : Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Soit en outre $h>0$ un réel pour lequel : $a+h \in I$.

a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction $t \overset{\delta}{\longmapsto} f(a+t)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,t^k-\frac{A}{(n+1)!}\,t^{n+1}$ s'annule en h.

b) Montrer que $\delta^{(i)}$ s'annule en 0 pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et simplifier $\delta^{(n+1)}(t)$ pour tout $t \in [0,h]$.

c) En déduire l'existence d'un réel $c \in]a,a+h[$ pour lequel :

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,h^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,h^{n+1} \qquad \text{(\textit{égalité de Taylor-Lagrange})}.$$

On ADMET que le résultat reste vrai sous l'hypothèse que : $h \leqslant 0$.

2) Une introduction aux fonctions absolument monotones : Un intervalle I étant donné, on dit qu'une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est *absolument monotone sur* I si pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$: $f^{(n)}(x) \geqslant 0$. Par exemple, la fonction exponentielle est absolument monotone sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$ est absolument monotone sur $[0,1[$.

b) Montrer que pour tout intervalle I, l'ensemble des fonctions absolument monotones sur I est stable par produit.

c) Pour quelles valeurs du réel α la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est-elle absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$?

d) Montrer que la fonction tangente est absolument monotone sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

e) **(Plus difficile)** Montrer que l'ensemble des fonctions absolument monotones sur $\mathbb{R}$ est stable par composition.

3) Le théorème de Bernstein : Soient $\alpha>0$ et f une fonction absolument monotone sur $[0,\alpha[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la fonction définie par : $R_n(0)=\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$ et pour tout $x \in]0,\alpha[$: $R_n(x)=\dfrac{1}{x^{n+1}}\left(f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\right)$.

a) Montrer, grâce à l'égalité de Taylor-Lagrange, que R_n est continue en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer par récurrence que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,\alpha[$: $R_n(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(xt)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que R_n est croissante sur $[0,\alpha[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x,y \in [0,\alpha[$ avec $x<y$: $0 \leqslant f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

e) En déduire que pour tout $x \in [0,\alpha[$: $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k$ (*théorème de Bernstein*).

Le résultat ainsi obtenu s'appelle le *développement en série entière de f au voisinage de* 0.

On suppose à présent que f est absolument monotone sur $]-\alpha,\alpha[$ et on note g la fonction $x \longmapsto f(x)+f(-x)$.

f) Montrer que g est absolument monotone sur $[0,\alpha[$.

g) En déduire que le résultat de la question **e)** reste valable pour tout $x \in]-\alpha,0[$.

4) L'exemple de la fonction arcsinus :

a) Calculer un développement limité à tout ordre de la fonction arcsinus au voisinage de 0. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de $\mathrm{Arcsin}^{(n)}(0)$ à base de factorielles.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel : $\mathrm{Arcsin}^{(n)}(x) = P_n(x)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-n}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n de la question **b)** est unique.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_{n+2} = (2n+1)X\,P_{n+1} + n^2\left(1-X^2\right)P_n$. On pourra commencer par remarquer que pour tout $x \in]-1,1[$: $\left(1-x^2\right)\mathrm{Arcsin}''(x) = x\,\mathrm{Arcsin}'(x)$.

e) En déduire que la fonction arcsinus est absolument monotone sur $[0,1[$.

f) En déduire l'égalité : $\displaystyle \pi = \lim_{n\to+\infty} 3\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \frac{1}{16^k(2k+1)}$.

5) Un résultat de bornitude sur les dérivées successives : Il est probable que vous n'atteindrez pas cette partie !

Soient $n \geqslant 2$, $a,b \in \mathbb{R}$ avec : $a<b$, et $f \in \mathscr{C}^n\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $]a,b[$.

On note X la fonction $x \longmapsto \left(f'(x), \dfrac{f''(x)}{2!}, \ldots, \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\right)$ définie sur $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Soit en outre $\varepsilon \in]0,b-a[$. On pose pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$: $v_i = \dfrac{i\varepsilon}{n}$ et on note V la matrice carrée :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_1^2 & \cdots & v_1^{n-2} \\ 1 & v_2 & v_2^2 & \cdots & v_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & v_{n-1} & v_{n-1}^2 & \cdots & v_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

a) Montrer que pour tous $x \in]a,b-\varepsilon[$ et $i \in [\![1,n-1]\!]$: $\displaystyle \left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\,v_i^{k-1}\right| \leqslant \frac{2}{v_i}\,\|f\|_\infty + \frac{v_i^{n-1}}{n!}\,\left\|f^{(n)}\right\|_\infty$.

b) En déduire l'existence d'un réel $M>0$ pour lequel pour tous $i \in [\![1,n-1]\!]$ et $x \in]a,b-\varepsilon[$: $\left|\big(VX(x)\big)_i\right| \leqslant M$.

c) Montrer que la matrice V est inversible. On pourra étudier le noyau de V ou montrer que la famille de ses colonnes est libre.

d) En déduire que les fonctions $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ sont bornées sur $]a,b-\varepsilon[$.

e) Montrer que les fonctions $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ sont bornées sur $]a,b[$ tout entier. On pourra s'intéresser à la fonction $x \longmapsto f(-x)$.
