Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Calculer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sh} x}$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a la fonction $x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^{ax}+\operatorname{Arctan} x}$ possède-t-elle un extremum local en 0 ? Le cas échéant, minimum local ou maximum local ?

4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{\ln\left(2^n+n^2\right)}{n^\alpha+\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

---

2 Les questions **1)** à **3)** suivantes sont indépendantes.

1) Étudier la convexité/concavité de la fonction $x \longmapsto \ln\dfrac{x}{1-x}$ sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, puis montrer que :

$$\frac{x_1\dots x_n}{(1-x_1)\dots(1-x_n)} \leqslant \left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n-(x_1+\dots+x_n)}\right)^n \quad \text{pour tous } x_1,\dots,x_n \in \left]0,\frac{1}{2}\right].$$

2) Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que f possède un minimum en a. Montrer que f est décroissante sur $I \cap]-\infty,a]$ et croissante sur $I \cap [a,+\infty[$.

3) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave positive.

a) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire enfin que f est *sous-additive*, i.e. que $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$ pour tous $x,y \geqslant 0$.

3

1) Montrer que pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ — dont on précisera les coefficients — pour lequel : $P(-1)=a, \quad P(0)=b, \quad P(1)=c \quad$ et $\quad P'(0)=d$.

2) Soit $f \in \mathscr{C}^4\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$. On note P_f l'unique polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ pour lequel :

$$P_f(-1)=f(-1), \qquad P_f(0)=f(0), \qquad P_f(1)=f(1) \qquad \text{et} \qquad P_f'(0)=f'(0).$$

Soit $x \in]0,1[$ fixé dans les questions **a)** et **b)**. On pose $A=\dfrac{f(x)-P_f(x)}{x^2\left(x^2-1\right)}$, puis $\delta(t)=f(t)-P_f(t)-At^2\left(t^2-1\right)$ pour tout $t \in [-1,1]$.

a) Montrer que $\delta^{(4)}$ s'annule au moins une fois dans $[-1,1]$. On commencera par chercher soigneusement des points en lesquels on sait d'emblée que δ ou ses dérivées s'annulent.

b) En déduire que : $\quad \left|f(x)-P_f(x)\right| \leqslant \dfrac{x^2\left(1-x^2\right)}{24}\left\|f^{(4)}\right\|_{\infty,[-1,1]} \quad$ après avoir justifié l'existence de la norme infinie.

Le résultat de la question **b)** reste vrai pour $x=0$ et $x=1$ et on admet qu'il l'est plus généralement pour tout $x \in [-1,1]$.

c) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x$, puis montrer que : $\quad \displaystyle\int_{-1}^1 P_f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}$.

d) En déduire que : $\quad \left|\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}\right| \leqslant \dfrac{1}{90}\left\|f^{(4)}\right\|_{\infty,[-1,1]}$.

e) Montrer que l'inégalité de la question **d)** est une égalité si l'on choisit pour fonction f la fonction $x \longmapsto x^4$. Le coefficient $\dfrac{1}{90}$ est donc optimal.

3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^4\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

a) Trouver une fonction affine croissante bijective de $[-1,1]$ sur $[a,b]$.

b) Montrer que : $\displaystyle \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880}\,\big\|f^{(4)}\big\|_{\infty,[a,b]}$.

4) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$, $f \in \mathscr{C}^4\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{2n}$ pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$. Montrer que : $\displaystyle \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(f\big(x_{2k}\big)+4f\big(x_{2k+1}\big)+f\big(x_{2k+2}\big)\Big)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\,\big\|f^{(4)}\big\|_{\infty,[a,b]}$.

Le résultat de la question **4)** donne une approximation satisfaisante de l'intégrale de f sur $[a,b]$ par une certaine moyenne de valeurs de f, satisfaisante en raison du facteur $\dfrac{1}{n^4}$. On appelle cette méthode numérique la *méthode de Simpson*.

4

1) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

a) Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbb{R}$ tout entier, encore notée f.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, il existe un réel $c \in \,]0,x[$ pour lequel $f'(x) = -\dfrac{\sin c}{2}$. On pourra appliquer un certain théorème à la fonction $t \longmapsto (x\cos x - \sin x)\,t^2 - x^2\,(t\cos t - \sin t)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\big|f'(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

d) En déduire que f possède un et un seul point fixe ℓ sur $\mathbb{R}$, puis que $\ell \in \,]0,1[$ et $f'(\ell) \neq 0$.

On note à présent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, puis en déduire à la main un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de ℓ à 10^{-3} près.

On a obtenu une majoration fine de l'écart $u_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en **1)e)**, mais ce n'est qu'une majoration et on préfèrerait connaître un équivalent simple de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour connaître précisément la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ. La suite du problème est consacrée à ce problème dans un cadre général.

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$. On suppose que :

— f possède un point fixe ℓ intérieur à I,

— ℓ est *attractif*, i.e. $\big|f'(\ell)\big| < 1$,

— $f'(\ell) \neq 0$.

2) Montrer l'existence de deux réels $r > 0$ et $\eta \in \,]0,1[$ pour lesquels :

$$]\ell-r,\ell+r[\, \subset I, \qquad]\ell-r,\ell+r[\text{ est stable par } f \qquad \text{et} \qquad f \text{ est } \eta\text{-lipschitzienne sur }]\ell-r,\ell+r[.$$

On se donne à présent une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $u_0 \in \,]\ell-r,\ell+r[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non stationnaire. Ainsi $u_n \neq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on peut poser $a_n = \dfrac{u_{n+1}-\ell}{f'(\ell)(u_n-\ell)}$.

3) a) Montrer que : $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\big(\eta^n\big)$.

b) Montrer, en exploitant la formule de Taylor-Young, que : $a_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathrm{O}\big(\eta^n\big)$, puis montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang N.

c) En déduire que la suite $\displaystyle \left(\sum_{k=N}^{n}\big|\ln a_k\big|\right)_{n\geqslant N}$ converge, puis qu'il en va de même de la suite $\displaystyle \left(\sum_{k=N}^{n}\Big(\big|\ln a_k\big| + \ln a_k\Big)\right)_{n\geqslant N}$.

d) En déduire l'existence d'un réel $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pour lequel : $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha f'(\ell)^n$.
