Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **5)** suivantes sont indépendantes.

1) Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \sqrt{3+\cos(2x)}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

3) Déterminer un équivalent simple de $\binom{n}{3} 2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) Soit $a \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a la fonction $x \overset{g}{\longmapsto} \dfrac{\ln(1+x)}{1+ax}$ possède-t-elle un point d'inflexion en 0 ?

5) On note φ l'endomorphisme $P \longmapsto P + XP''$ de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

---

2 La *méthode de Newton* est une méthode classique très efficace de calcul approché des zéros d'une fonction.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que f' est strictement positive sur $[a,b]$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On note F la fonction $x \longmapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1) **a)** Montrer que f s'annule une et une seule fois sur $]a,b[$ en un point noté z.

b) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $F(x)$ est l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente de f en x.

2) On suppose dans cette question seulement que f est convexe sur $[a,b]$.

a) Montrer que $F(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [z,b]$, puis que $[z,b]$ est stable par F.

À présent, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $x_0 \in [z,b]$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Représenter sur une même figure le graphe de f, le réel z et quelques termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

3) **a)** Montrer, en appliquant la formule de Taylor-Young à f et f', que : $\quad F(x) - z \underset{x\to z}{=} \dfrac{f''(z)}{2f'(z)}(x-z)^2 + o\big((x-z)^2\big)$.

b) En déduire l'existence d'un réel $\alpha > 0$ pour lequel d'une part $]z-\alpha, z+\alpha[\subset [a,b]$ et d'autre part, pour tout $x \in]z-\alpha, z+\alpha[$: $\quad \big|F(x) - z\big| \leqslant \dfrac{|x-z|^2}{10\alpha}$.

c) En déduire que $]z-\alpha, z+\alpha[$ est stable par F.

À présent, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $x_0 \in]z-\alpha, z+\alpha[$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |x_n - z| < \dfrac{\alpha}{10^{2^n-1}}$.

e) On souhaite approcher z par un certain x_n avec 10^6 décimales correctes. Pour $\alpha = 1$, et bien sûr sans calculatrice, quelle valeur de n peut-on choisir ? Qu'en serait-il si on avait obtenu l'inégalité $|x_n - z| < 10^{-n}$ à la question **d)** ?

4) Le résultat de la question **3)d)** garantit une convergence rapide de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'apporte la convexité quand f est convexe ?

---

3 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) **Décomposition de Fitting :**

a) Étudier la monotonie des suites $\big(\operatorname{Ker} f^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(\operatorname{Im} f^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer qu'il existe un plus petit entier $k \in [\![1,n]\!]$ pour lequel $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$. Cet entier qu'on notera p est appelé l'*indice de f*. On pourra distinguer le cas où l'endomorphisme f est injectif de celui où il ne l'est pas.

c) Montrer par récurrence que pour tout $k \geqslant p$: $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$.

d) En déduire que : $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$ (*décomposition de Fitting de E par rapport à f*).

e) Montrer que p est aussi le plus petit entier $k \in [\![1, n]\!]$ pour lequel $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$.

f) Montrer que $f|_{\operatorname{Ker} f^p}$ est un endomorphisme nilpotent de $\operatorname{Ker} f^p$ et que $f|_{\operatorname{Im} f^p}$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} f^p$.

g) Montrer que si f est nilpotent, p est tout simplement son indice de nilpotence.

h) Calculer l'indice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Une inégalité de concavité : On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\delta_k = \dim \operatorname{Ker} f^k - \dim \operatorname{Ker} f^{k-1}$.

a) Montrer, en appliquant judicieusement le théorème du rang, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\delta_k = \dim\left(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^{k-1}\right)$.

b) En déduire que la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant \dfrac{1}{2}\left(\dim \operatorname{Ker} f^{k+1} + \dim \operatorname{Ker} f^{k-1}\right)$. De façon générale, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *concave* si justement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geqslant \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$.

c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $k\delta_k \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^k \leqslant k \dim \operatorname{Ker} f$.

d) En déduire que si f est nilpotent d'indice au plus $n-1$: $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 2$.

4

1) Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ distincts.

a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction $t \stackrel{\delta}{\longmapsto} f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k - \frac{A}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}$ s'annule en b.

b) Montrer que $\delta^{(i)}$ s'annule en a pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

c) En déduire l'existence d'un réel c compris entre a et b strictement pour lequel :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (\textit{égalité de Taylor-Lagrange}).$$

On a supposé a et b distincts pour démontrer ce résultat, mais il s'avère vrai après coup dans le cas où $a = b$.

2) a) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$: $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t \, \mathrm{d}t \leqslant \ln k$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n! \geqslant \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

3) On note à présent g la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$ et I l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $g^{(n)}(x) \geqslant 0$. On pourra observer que $g'(x) = g(x)\mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Justifier l'existence d'un réel M pour lequel pour tout $x \in I$: $g(x) \leqslant M$ et $g'(x) \leqslant M$.

c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$: $g^{(n)}(x) \leqslant M\, n^n$. On ADMET que $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \leqslant 2$.

d) En déduire que pour tout $x \in I$: $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

4) On généralise dans cette question le résultat de la question **3)**. Soit $f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose f *absolument monotone sur* $\mathbb{R}_+$, i.e. que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

a) Déduire de l'égalité de Taylor-Lagrange que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \geqslant 0$: $a < b \implies \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{f(b)}{(b-a)^{n+1}}$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $0 \leqslant f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leqslant \frac{f(3x)}{2^{n+1}}$, puis que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

On suppose enfin f absolument monotone sur $\mathbb{R}$ tout entier, i.e. que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

c) Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x) + f(-x)$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}_+$.

d) En déduire que pour tout $x < 0$: $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
