DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)** et **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive. On suppose que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_{n+1}=u_n+u_{2n+1}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^\alpha+\ln n}$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

3) **a)** Résoudre l'équation différentielle $x\ln(x)\,y'+y=x$ d'inconnue $y\in\mathscr{D}\big(]1,+\infty[,\mathbb{R}\big)$.

b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{\alpha}{\ln x}$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$? En déduire que l'équation de la question **a)** possède une et une seule solution y pour laquelle $\displaystyle\lim_{x\to1^+}y(x)=1$.

4) Résoudre l'équation différentielle $4xy''+2y'+9y=\cos\sqrt{x}$ d'inconnue $y:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fois dérivable grâce au changement de variable $x=t^2$.

---

2 On note f la fonction $x\longmapsto\dfrac{(x-1)^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $u_0\geqslant0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_{n+1}=f(u_n)$.

1) **a)** Étudier le signe de la fonction $x\longmapsto f(x)-x$ sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer les points fixes de f. On notera α et β ces points fixes avec $\alpha<\beta$. Préciser leur position par rapport à 0 et 1.

b) Montrer que les intervalles $[0,1]$, $[0,\beta[$ et $]\beta,+\infty[$ sont stables par f.

On ADMET pour gagner du temps que α et β sont les seuls points fixes de $f\circ f$.

2) Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle dans chacun des cas suivants :

a) $u_0\geqslant\beta$. **b)** $u_0\in[0,1]$.

3) On suppose dans cette question que $u_0\in\,]1,\beta[$.

a) Montrer par l'absurde que pour un certain $N\in\mathbb{N}$: $\quad u_N\in[0,1]$.

b) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

---

3 On appelle *suite de Cantor* toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour laquelle $a_1\in\mathbb{Z}$ et pour tout $k\geqslant2$: $\quad a_k\in[\![0,k-1]\!]$.

1) Soit $a=(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cantor. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad A_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{k!}$.

a) Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\geqslant n$: $\quad 0\leqslant A_p-A_n\leqslant\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{p!}$.

b) En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note $\widehat{a}$ sa limite.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad A_n\leqslant\widehat{a}\leqslant A_n+\dfrac{1}{n!}$.

2) On conserve les notations de la question **1)**, mais on suppose de plus que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\rho$ pour un certain $\rho\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un entier N_n pour lequel : $\quad\dfrac{a_{n+1}}{n+1}\leqslant n!\,\widehat{a}-N_n\leqslant\dfrac{a_{n+1}+1}{n+1}$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cos\big(n!\,2\pi\,\widehat{a}\big)=\cos(2\pi\rho)$.

3) Soit $\theta \in [0, \pi]$. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad a_k = \left\lfloor \dfrac{k\theta}{2\pi} \right\rfloor$.

a) Montrer que la suite $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cantor.

b) Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\big(n!\, 2\pi\, \widehat{a}\big)$.

4) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \cos(n!\, \pi r) = 1$.

5) On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant pour tout $x \geqslant 0$: $\quad f_0(x) = \mathrm{e}^x \quad$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$:

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $\quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \dfrac{x^n \mathrm{e}^x}{n!}$.

b) Déterminer une expression explicite de $f_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$.

c) En déduire que pour tout $x \geqslant 0$: $\quad \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

6) **a)** Proposer une suite de Cantor a pour laquelle $\widehat{a} = \mathrm{e}$.

On reprend les notations de la question **1)** pour cette suite de Cantor particulière.

b) Montrer que l'entier N_n a la même parité que $n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire la nature des suites $\big(\cos\big(n!\, 2\pi \mathrm{e}\big)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\big(\cos(n!\, \pi \mathrm{e})\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et leurs limites éventuelles, puis que e est irrationnel.

7) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $p_0 = 0$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad p_n = \lfloor n!\, x \rfloor, \quad a_n = p_n - n p_{n-1} \quad$ et $\quad A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$.

a) Montrer que la suite $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cantor.

b) Exprimer A_n en fonction de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Montrer que $\widehat{a} = x$.

d) Montrer que x est rationnel si et seulement si a est nulle à partir d'un certain rang.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *développement de Cantor de* x toute suite $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ pour laquelle $\widehat{a} = x$. Au lieu de représenter x par un développement décimal illimité avec des puissances de 10, on le représente ici par un développement à base de factorielles. Le résultat de la question **7)c)** énonce que tout réel possède un développement de Cantor.

8) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $b = (b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de Cantor distinctes. On fait l'hypothèse que $x = \widehat{a} = \widehat{b}$. On peut ainsi noter m le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $a_k \neq b_k$, et quitte à permuter a et b, on peut supposer $b_m < a_m$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!} \quad$ et $\quad B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k!}$.

a) Montrer que $a_m = b_m + 1$ en exploitant le résultat de la question **1)c)**.

b) En déduire que $x = A_m = B_m + \dfrac{1}{m!}$, puis que x est rationnel et que pour tout $k \geqslant m+1$: $\quad a_k = 0$.

c) Calculer $\lim\limits_{p \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=m+1}^{p} \frac{k-1-b_k}{k!}$, puis montrer que pour tout $k \geqslant m+1$: $\quad b_k = k-1$.

9) Le développement de Cantor d'un réel est-il unique ?