Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{e^x - \cos x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) On pose $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad f(0) = f'(0) = f(1) = 0 \right\}$ et G l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 2.

a) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé. On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor \sin^2(\pi x)}{x-n}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{n\}$, clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

a) Montrer que f est continue en tout entier relatif distinct de n.

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en n.

4) Montrer que les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, α décrivant $\mathbb{R}$, sont linéairement indépendantes dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

---

2 Dans ce problème, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel non nul.
Comme souvent, on identifiera toute famille $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ à la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Pour tout $A \in \mathbb{K}^n$, on pose $\mathscr{H}(A) = \left\{ X \in \mathbb{K}^n \mid \quad A^\top X = 0 \right\}$.

1) a) Montrer que $\mathscr{H}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ pour tout $A \in \mathbb{K}^n$.

b) Déterminer, pour $n = 4$, la dimension de $\mathscr{H}(1,2,1,1) \cap \mathscr{H}(1,3,2,0) \cap \mathscr{H}(1,0,-1,3)$.

c) Montrer que $\dim \mathscr{H}(A) = n - 1$ pour tout $A \in \mathbb{K}^n$ non nul. Que vaut $\mathscr{H}(0, \ldots, 0)$?

2) Soient $A \in \mathbb{K}^n$ non nul et $B \in \mathbb{K}^n$ deux vecteurs pour lesquels $\mathscr{H}(A) = \mathscr{H}(B)$. On note $t \in [\![1, n]\!]$ un entier pour lequel $a_t \neq 0$.

a) Montrer que $b_t \neq 0$.

b) Montrer que $\mathscr{H}(A) \subset \mathscr{H}(a_t B - b_t A)$, puis que A et B sont colinéaires.

En résumé, pour tous $A, B \in \mathbb{K}^n$ non nuls, $\mathscr{H}(A) = \mathscr{H}(B)$ si et seulement si A et B sont colinéaires.

3) Montrer que pour tous $A, B \in \mathbb{K}^n$, $\dim\left(\mathscr{H}(A) \cap \mathscr{H}(B)\right) = n - 2$ si et seulement si la famille (A, B) est libre. On pourra s'intéresser à $\mathscr{H}(A) + \mathscr{H}(B)$.

4) Soit $(A_1, \ldots, A_p)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

a) Pourquoi existe-t-il une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible dont les p premières colonnes sont $A_1, \ldots, A_p$? On notera $A_{p+1}, \ldots, A_n$ les colonnes suivantes de A.

b) Justifier l'existence d'une famille $(B_1, \ldots, B_n)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ pour laquelle $A_i^\top B_j = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ et montrer que la famille $(B_1, \ldots, B_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

c) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathscr{H}(A_i) = \operatorname{Vect}(B_{p+1}, \ldots, B_n)$.

5) Montrer que pour toute famille $(A_1, \ldots, A_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ de rang r : $\quad \dim \displaystyle\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathscr{H}(A_i) = n - r$.

---

3 On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et majorées pour lesquelles $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$ pour tout $x \geqslant 0$. L'ensemble $\mathscr{E}$ contient clairement les fonctions $x \longmapsto \cos(\omega x)$, ω décrivant $\mathbb{R}_+$, mais sans restrictions supplémentaires, il contient beaucoup d'autres fonctions.

1) a) Soit $a \geqslant 1$. Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser sa limite éventuelle.

b) En déduire que toute fonction de $\mathscr{E}$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soit $f \in \mathscr{E}$. On suppose que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$.

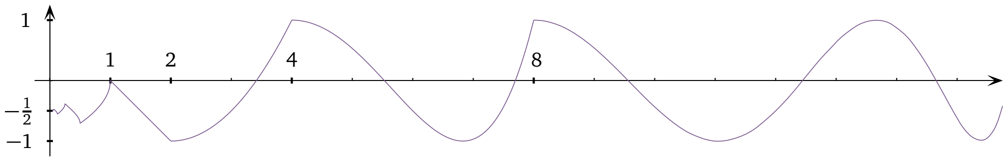
a) Montrer que $f(\mathbb{R}_+) = [-1, 1]$.

b) Soit x un antécédent de -1 par f. Montrer que f s'annule sur $[x, 2x]$, puis que -1 possède aussi un antécédent par f dans $[2x, +\infty[$.

c) En déduire que pour tout $y \in [-1, 1]$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ a des solutions aussi grandes que l'on veut.

d) Soit $y \in [-1, 1]$ distinct de $-\dfrac{1}{2}$ et 1. Justifier l'existence du réel $t = \inf\left\{x \geqslant 0 \mid \quad f(x) = y\right\}$, puis montrer que $t > 0$ et $f(t) = y$. En d'autres termes, f prend la valeur y pour la première fois en t.

Décidément, f ressemble furieusement aux fonctions $x \longmapsto \cos(\omega x)$, ω décrivant $\mathbb{R}_+$. Et pourtant ! Par exemple, la fonction représentée ci-dessous appartient à $\mathscr{E}$ et prend une infinité de fois la valeur $-\dfrac{1}{2}$ au voisinage de 0.



3) a) Soit $\omega > 0$. Exprimer $\cos(\omega x)$ en fonction de $\sin \dfrac{\omega x}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\omega x)}{x^2}$.

b) Rappeler la définition du réel $\operatorname{Arccos} x$ pour tout $x \in [-1, 1]$ ainsi que l'allure du graphe de la fonction arccosinus.

On fixe à présent $f \in \mathscr{E}$ et on suppose jusqu'à la fin du problème que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$ et que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-f(x)}{x^2}$ possède une limite finie ℓ en 0.

4) Calculer $f(0)$ et montrer que $\ell \geqslant 0$.

5) Soit $x \geqslant 0$. On suppose $f(x) \neq 1$. Grâce à **2)a)**, on peut poser $\theta_n = \operatorname{Arccos} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ à partir d'un certain rang N.

b) En déduire que $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ pour tout $n \geqslant N$. On pourra commencer par simplifier $\cos(2\theta_{n+1})$.

c) Vérifier que pour tout $n \geqslant N$: $\quad \left(2^n\theta_n\right)^2 \times \dfrac{1-\cos\theta_n}{\theta_n^2} = x^2 \times \dfrac{1-f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\left(\dfrac{x}{2^n}\right)^2}$ $\quad$ et en déduire que $2^n\theta_n = 2^N\theta_N = x\sqrt{2\ell}$.

En particulier : $\quad f\left(\dfrac{x}{2^N}\right) = \cos\theta_N = \cos\dfrac{x\sqrt{2\ell}}{2^N}$.

d) En déduire que $f(x) = \cos\left(x\sqrt{2\ell}\right)$.

6) a) Montrer que $\ell > 0$.

b) En déduire que l'ensemble $\left\{x \geqslant 0 \mid \quad f(x) = \cos\left(x\sqrt{2\ell}\right)\right\}$ contient $[0, \alpha[$ pour un certain $\alpha > 0$.

c) En déduire que f est la fonction $x \longmapsto \cos\left(x\sqrt{2\ell}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.