DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **3)** suivantes sont indépendantes.

1) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{e^x - \cos x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) On note E l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de trace nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension ainsi que l'un quelconque de ses supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Montrer que les fonctions suivantes sont linéairement indépendantes dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}\big(]1,+\infty[,\mathbb{R}\big)$. On pourra par exemple tirer parti de leur comportement asymptotique en $+\infty$. Une rédaction soignée est attendue.

Au choix :
— soit les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, α décrivant $\mathbb{R}$,
— soit les fonctions $x \longmapsto x^\alpha (\ln x)^\beta$, α et β décrivant $\mathbb{R}$.

Évidemment, la deuxième version rapporte plus de points !

---

2 Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel non nul.
Comme souvent, toute famille $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ sera identifiée à la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Pour tout $A \in \mathbb{K}^n$, on pose : $\mathscr{H}(A) = \Big\{ X \in \mathbb{K}^n \ \big| \ A^\top X = 0 \Big\}$.

1) **a)** Montrer que $\mathscr{H}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ pour tout $A \in \mathbb{K}^n$.

b) Dans cette question : $n = 4$. Déterminer la dimension de : $\mathscr{H}(1,2,1,1) \cap \mathscr{H}(1,3,2,0) \cap \mathscr{H}(1,0,-1,3)$.

c) Montrer que pour tout $A \in \mathbb{K}^n$ non nul : $\dim \mathscr{H}(A) = n-1$. Que vaut $\mathscr{H}(0, \ldots, 0)$?

2) Soient $A \in \mathbb{K}^n$ non nul et $B \in \mathbb{K}^n$. On suppose que : $\mathscr{H}(A) = \mathscr{H}(B)$ et on fixe un entier $i_0 \in [\![1,n]\!]$ pour lequel : $a_{i_0} \neq 0$.

a) Montrer que : $b_{i_0} \neq 0$.

b) Montrer que : $\mathscr{H}(A) \subset \mathscr{H}\big(a_{i_0} B - b_{i_0} A\big)$, puis que A et B sont colinéaires.

En résumé, pour tous $A, B \in \mathbb{K}^n$ non nuls : $\mathscr{H}(A) = \mathscr{H}(B)$ si et seulement si A et B sont colinéaires.

3) Montrer que pour tous $A, B \in \mathbb{K}^n$: $\dim\big(\mathscr{H}(A) \cap \mathscr{H}(B)\big) = n-2$ si et seulement si la famille (A, B) est libre.

4) Soit $(A_1, \ldots, A_p)$ une famile libre de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

a) Pourquoi existe-t-il une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible dont les p premières colonnes sont $A_1, \ldots, A_p$? On notera $A_{p+1}, \ldots, A_n$ les colonnes suivantes de A.

b) Justifier l'existence d'une famille $(B_1, \ldots, B_n)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ pour laquelle pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$: $A_i^\top B_j = \delta_{ij}$ et montrer que la famille $(B_1, \ldots, B_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

c) Montrer que : $\displaystyle\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathscr{H}(A_i) = \operatorname{Vect}\big(B_{p+1}, \ldots, B_n\big)$.

5) Soit $(A_1, \ldots, A_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ de rang r. Montrer que : $\displaystyle\dim \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathscr{H}(A_i) = n - r$.

---

3 Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, on dira que f est *solution d'*★ si pour tous $x,y\in\mathbb{R}$: $f(x+y)+f(x-y)=2\big(f(x)+f(y)\big)$.

1) Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une solution d'★.

a) Montrer que f est paire.

b) Montrer que pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$: $f(nx)=n^2f(x)$.

c) Montrer que pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{Q}$: $f(rx)=r^2f(x)$.

d) Montrer que si f est bornée au voisinage de 0, elle l'est aussi sur tout intervalle $]-A,A[$, A décrivant $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que les solutions d'★ continues sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions $x\longmapsto\lambda x^2$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

3) Soient $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction et $p,q>1$. On suppose que φ est bornée au voisinage de 0 et que : $\varphi(px)=q\,\varphi(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$: $\varphi\left(\dfrac{x}{p^n}\right)=\dfrac{\varphi(x)}{q^n}$.

b) En déduire que φ est continue en 0 en revenant à la définition de la limite.

4) Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une solution d'★ bornée au voisinage de 0.

a) Montrer que f est continue en 0.

Soit $a\in\mathbb{R}$ fixé. On note g la fonction $x\longmapsto f(a+x)-f(a)-f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(2x)=2\,g(x)$.

c) Montrer que g est bornée au voisinage de 0.

d) En déduire que f est continue en a. Conclusion ?

---

4 Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous avez réussi parfaitement ou presque tout le reste du devoir.

1) Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction pour laquelle : $f\circ f=\mathrm{Id}_\mathbb{R}$ et $f\neq\mathrm{Id}_\mathbb{R}$.

a) Montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f possède un et un seul point fixe α sur $\mathbb{R}$.

c) On note φ la fonction $x\longmapsto\begin{cases}\alpha-x & \text{si : } x\geqslant\alpha\\ f(x)-\alpha & \text{si : } x<\alpha.\end{cases}$

Montrer que φ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}=-\mathrm{Id}_\mathbb{R}$.

2) Déterminer l'ensemble des fonctions $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles : $f\circ f=\mathrm{Id}_\mathbb{R}$.
