DEVOIR SURVEILLÉ

1 Montrer l'égalité : $\text{Arcsin}\,\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}\,\text{Arctan}\,\dfrac{4}{3}$.

---

2 On note f la fonction $x \longmapsto \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

1) Montrer que f est définie sur $[-1,1]$.

Comme f est impaire, on se contentera désormais de l'étudier sur $[0,1]$.

2) Sur quel ensemble f est-elle continue ? Sur quel ensemble $\mathscr{D}_{f'}$ est-elle dérivable ?

3) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}_{f'}$: $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ ou $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. Sur quel ensemble la première relation est-elle vraie ? Et la deuxième ?

4) En déduire une expression explicite de f sur $[0,1]$.

---

3 Il est bien connu que pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc après passage à l'exponentielle : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

On s'intéresse dans ce problème aux réels $\alpha > 0$ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{e} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$.

On fixe pour cela un réel $\alpha > 0$ quelconque et on note f_α la fonction $x \longmapsto (x+\alpha)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Montrer proprement l'égalité : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 1$.

b) Montrer proprement l'égalité : $\lim\limits_{x\to 0} f'_\alpha(x) = -\infty$.

c) Calculer et simplifier f''_α. Une indication pour vérifier son résultat : $f''_\alpha(1) = \dfrac{3\alpha-1}{4}$.

2) On se place dans cette question dans le cas où : $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{e} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.

3) On suppose désormais que : $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que f'_α s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel notée x_α, et que : $x_\alpha < \dfrac{\alpha}{1-2\alpha}$.

b) En déduire les variations de f_α sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel pour tout $n \geqslant N$: $\mathrm{e} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$.

---

4 Soient $s \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{C}^*$ fixés une fois pour toutes. On note z et z' les deux racines complexes du polynôme $P = X^2 - sX + p$ — éventuellement égales — données sous forme trigonométrique : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ avec $r, r' \geqslant 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

1) Exprimer s et p en fonction de z et z', puis donner une expression simple de $s^2 - 4p$ et montrer que z et z' sont non nuls.

2) a) On suppose dans cette question que : $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$. Montrer qu'alors : $\left|s^2 - 4p\right| = |s|^2 - 4|p|$.

b) On suppose dans cette question que : $r = r'$. Montrer qu'alors : $\left|s^2 - 4p\right| = 4|p| - |s|^2$.

On pose à présent : $Z = \dfrac{z'}{z}$.

3) L'inégalité triangulaire affirme que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\left|z+z'\right| \leqslant |z|+|z'|$. Rappeler sans preuve à quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est une égalité.

4) On suppose dans cette question que : $\left|s^2-4p\right| = |s|^2-4|p|$.

a) Montrer que pour un certain réel $\lambda \geqslant 4$: $s^2 = \lambda p$.

b) En déduire l'égalité : $(Z+1)^2 = \lambda Z$.

c) En déduire que Z est un réel positif, puis que : $\theta \equiv \theta' \ [2\pi]$.

5) On suppose dans cette question que : $\left|s^2-4p\right| = 4|p|-|s|^2$.

a) Montrer que pour un certain réel $\lambda \in [0,4]$: $s^2 = \lambda p$.

b) En déduire que : $|Z| = 1$, ce qui montre aussitôt que : $r = r'$.

---

5 Des points de $\mathbb{C}$ sont dits *cocycliques* s'ils appartiennent à un même cercle. En outre, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts, on appelle *birapport de a, b, c et d* le nombre complexe : $\left[a,b,c,d\right] = \dfrac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$.

On étudie dans ce problème une caractérisation de la cocyclicité par le birapport.

1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ quatre points distincts. On suppose a, b et c alignés. Montrer l'équivalence suivante :

$$a, b, c \text{ et } d \text{ sont alignés si et seulement si : } \quad \left[a,b,c,d\right] \in \mathbb{R}.$$

2) Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{C}$. Vérifier que si : $ab'-ba' \neq 0$, le couple $\left(\dfrac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\right)$ est solution du système : $\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{C}^2$.

3) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ trois points non alignés.

a) Écrire pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ la proposition : « ω est équidistant de a, b et c » sous la forme d'un système linéaire de deux équations d'inconnues ω et $\overline{\omega}$.

b) En déduire que a, b et c sont cocycliques.

4) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On suppose que les points $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ et z sont distincts.

a) Montrer l'égalité : $\mathrm{Im}\left(\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}, z\right]\right) = \dfrac{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}} \times \dfrac{|z|^2-1}{\left|z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|^2}$.

b) En déduire que : $\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}, z\right] \in \mathbb{R}$ si et seulement si : $z \in \mathbb{U}$.

5) Montrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$: $\left[\lambda a+\mu, \lambda b+\mu, \lambda c+\mu, \lambda d+\mu\right] = \left[a,b,c,d\right]$.

6) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ quatre points distincts. On suppose a, b et c non alignés. Montrer, notamment grâce aux questions **3)** et **5)**, l'équivalence suivante :

$$a, b, c \text{ et } d \text{ sont cocycliques si et seulement si : } \quad \left[a,b,c,d\right] \in \mathbb{R}.$$

À l'issue de ces questions, le théorème suivant est démontré :

Théorème (Caractérisation des cercles-droites par le birapport) Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts :

$$a, b, c \text{ et } d \text{ sont cocycliques ou alignés si et seulement si : } \quad \left[a,b,c,d\right] \in \mathbb{R}.$$
