Devoir surveillé

1

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\dfrac{x+1}{x-1} \ln x \geqslant 2$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\dfrac{\ln x}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

3) En déduire que pour tous $x, y > 0$ distincts : $\dfrac{2}{x+y} \leqslant \dfrac{\ln x - \ln y}{x-y} \leqslant \dfrac{x+y}{2xy}$.

---

2 Les questions **1)** et **2)** suivantes sont indépendantes.

1) Montrer l'égalité : $2 \operatorname{Arccos} \dfrac{4}{5} = \operatorname{Arcsin} \dfrac{24}{25}$.

2) On note f la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arccos} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. On va calculer de deux manières différentes une expression simplifiée de f sur son ensemble de définition.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Sur quel ensemble est-elle dérivable ?

b) **Première approche :** Montrer par une technique de dérivation que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 2 \operatorname{Arctan} |x|$.

c) **Deuxième approche :** Simplifier $f(\tan\theta)$ pour tout $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Retrouver ainsi le résultat de la question **b)**.

---

3 Soit $n \geqslant 2$ fixé. On pose : $\theta = \dfrac{\pi}{n}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)\, z^k$.

1) **a)** Montrer que pour un certain réel α à préciser : $P(1) = 2^n \cos^n \alpha$.

b) Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$: $Q(z) = \left(z e^{i\theta} + 1\right)^n - \left(z e^{-i\theta} + 1\right)^n$.

a) Exprimer $Q(z)$ en fonction de $P(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

b) En déduire que pour toute racine complexe z de P : $\left|z + e^{i\theta}\right| = \left|z + e^{-i\theta}\right|$.

c) En déduire que les racines de P sont toutes réelles.

3) **a)** Déterminer une forme trigonométrique de $x e^{i\theta} + 1$ pour tout $x \in [-1, 0]$.

b) En déduire que pour tout $x \in [-1, 0]$: $P(x) = \left(x^2 + 2x\cos\theta + 1\right)^{\frac{n}{2}} \sin\left(n \operatorname{Arctan} \dfrac{x \sin\theta}{1 + x\cos\theta}\right)$.

c) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{x\sin\theta}{1+x\cos\theta}$ est bijective de $[-1, 0]$ sur $\left[-\dfrac{1}{t}, 0\right]$ avec : $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

d) Exprimer, comme cela a été fait en TD, $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$ en fonction de $\operatorname{Arctan} x$ pour tout $x > 0$. Une preuve est ici attendue !

e) En déduire que la fonction $x \longmapsto n \operatorname{Arctan} \dfrac{x\sin\theta}{1+x\cos\theta}$ est bijective de $[-1, 0]$ sur $\left[-\dfrac{(n-1)\pi}{2}, 0\right]$.

f) En déduire le nombre de racines de P dans $[-1, 0]$.

On pourrait en réalité déterminer explicitement toutes les racines de P, mais les racines $n^{\text{èmes}}$ ne sont hélas pas au programme de ce devoir surveillé…

---

4 On appelle *homographie* toute fonction de la forme $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ pour certains $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec : $ad - bc \neq 0$.

1) Proposer une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'une homographie soit définie sur $\mathbb{U}$ tout entier.

Les homographies de ce problème seront désormais toutes définies sur $\mathbb{U}$ et sur $\mathbb{U}$ seulement. Par exemple, bien que l'homographie $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$ puisse être définie sur $\mathbb{C}^*$, c'est sa restriction à $\mathbb{U}$ seulement que l'on notera $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$.

2) Montrer que la fonction $z \overset{h_\alpha}{\longmapsto} \dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$ est une homographie définie sur $\mathbb{U}$ tout entier et à valeurs dans $\mathbb{U}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.

3) Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, si la fonction $\theta \longmapsto \mathrm{Re}\left(\zeta e^{i\theta}\right)$ est constante sur $\mathbb{R}$, alors : $\zeta = 0$.

4) Soit $f : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ une homographie définie sur $\mathbb{U}$ tout entier avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et : $ad - bc \neq 0$. On suppose f à valeurs dans $\mathbb{U}$.

a) En exploitant le résultat de la question **2)**, montrer que : $a\overline{b} - c\overline{d} = 0$.

b) Montrer que si : $d = 0$, f est de la forme $z \longmapsto \dfrac{u}{z}$ pour un certain $u \in \mathbb{U}$.

5) On conserve dans cette question les notations et les hypothèses de la question **4)**, mais on suppose que : $d \neq 0$.

a) Montrer que : $f(0) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. On pourra pour cela confronter les deux quantités $ad - bc$ et $a\overline{b} - c\overline{d}$.

On peut dès lors noter g la fonction $h_{f(0)} \circ f$ définie sur $\mathbb{U}$ tout entier.

b) Montrer que g est de la forme $z \longmapsto uz$ pour un certain $u \in \mathbb{U}$.

c) En déduire que f est de la forme $z \longmapsto u\,\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$ pour certains $u \in \mathbb{U}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.

En résumé, on a montré que les homographies qui sont à la fois définies sur $\mathbb{U}$ tout entier et à valeurs dans $\mathbb{U}$ sont exactement les fonctions de la forme $z \longmapsto \dfrac{u}{z}$ avec $u \in \mathbb{U}$ et les fonctions $z \longmapsto u\,\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$ avec $u \in \mathbb{U}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.