Devoir surveillé

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)**, **4)** et **5)** suivantes sont indépendantes.

1) Montrer que : $2\,\mathrm{Arccos}\,\dfrac{3}{\sqrt{13}} = \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{12}{13}$.

2) **a)** Représenter graphiquement l'ensemble $\mathscr{A} = \Big\{ z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z| \in [1,4] \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \Big\}$.

b) Représenter graphiquement l'ensemble $\mathscr{B} = \Big\{ z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \mathrm{e}^{2z} \in \mathscr{A} \Big\}$.

3) On note f la fonction $x \longmapsto \mathrm{Arccos}\,\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

On souhaite montrer de deux manières différentes que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,|x| \quad \bigstar$.

a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b) **Première approche :** Prouver la relation $\bigstar$ par une technique de dérivation soigneusement justifiée.

c) **Deuxième approche :** Simplifier $f(\tan\theta)$ pour tout $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, puis pour tout $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$. En déduire une nouvelle démonstration de la relation $\bigstar$.

4) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ fixé. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $D_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx}$ et $F_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} D_p$.

Montrer que $D_n = \dfrac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $F_n = \left(\dfrac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\right)^2$.

5) On note f la fonction $x \longmapsto \cos^3 x + \sin^3 x$.

a) Calculer et simplifier f'. On donnera le résultat sous la forme d'un réel multiplié par un produit de cosinus/sinus.

b) Simplifier $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

c) Étudier les variations de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

d) En déduire les solutions de l'équation $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

---

2 Il est bien connu que pour tous $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^r$. Cela découle de l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ valable pour tout $x > -1$ On s'intéresse dans ce problème aux réels $\alpha > 0$ pour lesquels pour tous $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{e}^r \leqslant \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{n+\alpha}$.
On fixe pour cela deux réels $r > 0$ et $\alpha > 0$ et on note f la fonction $x \longmapsto (x+\alpha)\ln\left(1 + \dfrac{r}{x}\right)$ définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) **a)** Calculer proprement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer tout aussi proprement que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$.

b) Calculer et simplifier f''. Indication pour vérifier le résultat : $f''(r) = \dfrac{3\alpha - r}{4r^2}$.

2) Dans cette question : $\alpha = \dfrac{r}{2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{e}^r \leqslant \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{n+\frac{r}{2}}$.

3) Dans cette question : $0 < \alpha < \dfrac{r}{2}$.

a) Montrer que f' s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel notée β, puis que $\beta < \dfrac{r\alpha}{r - 2\alpha}$.

b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel pour tout $n \geqslant N$: $\mathrm{e}^r > \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{n+\alpha}$.

---

3 On se donne une fois pour toutes un entier naturel non nul n et on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
On associe à toute fonction $f : [\![0, n-1]\!] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\widehat{f}$ définie pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$ par : $\widehat{f}(p) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\omega^{-pk}$.

On rappelle que pour tous $x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$: $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k^2}$ (*inégalité de Cauchy-Schwarz*).

1) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-pk}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Attention, le résultat dépend de p.

2) Soit $f : [\![0, n-1]\!] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

a) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$: $\left|\widehat{f}(p)\right|^2 = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n-1} f(k)\overline{f(l)}\,\omega^{(l-k)\,p}$.

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \left|\widehat{f}(p)\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(k)\right|^2$ (*formule de Parseval*).

3) Soit $f : [\![0, n-1]\!] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $f(k) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \widehat{f}(p)\,\omega^{pk}$.

On aura peut-être besoin de la notion d'*indicatrice* dans les questions qui suivent. Pour toute partie A de $[\![0, n-1]\!]$, on note $\mathbb{1}_A$ l'*indicatrice de A*, i.e. la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in [\![0, n-1]\!] \setminus A. \end{cases}$

4) Soit $f : [\![0, n-1]\!] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction non identiquement nulle. On pose :

$$S = \left\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid f(k) \neq 0\right\} \qquad \text{et} \qquad \widehat{S} = \left\{p \in [\![0, n-1]\!] \mid \widehat{f}(p) \neq 0\right\}.$$

a) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$: $\left|\widehat{f}(p)\right| \leqslant \sqrt{\dfrac{|S|}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|f(k)\right|^2}$.

b) En déduire que $|S| \times |\widehat{S}| \geqslant n$, où l'on rappelle que pour tout ensemble fini E, $|E|$ est le cardinal de E.

5) Déterminer l'ensemble des fonctions $f : [\![0, n-1]\!] \longrightarrow \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ pour lesquelles $\left|\widehat{f}(p)\right| < \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$.