Devoir surveillé

1

1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\cos(\text{Arctan}\, t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ et simplifier de même : $\sin(\text{Arctan}\, t)$.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que : $ab < 1$.

a) Montrer que : $\cos\big(\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b\big) > 0$.

b) Montrer l'égalité : $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\, \dfrac{a+b}{1-ab}$.

3) a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite ℓ. Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(u_{k+1} - u_{k-1}\big)$.

b) En déduire l'existence et la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\, \frac{2}{k^2}$. On pourra commencer par simplifier : $1-(k+1)(1-k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2

1) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\ln \text{ch}\, x \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

2) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$: $\ln \text{ch}\, x \geqslant \dfrac{3x^2}{8}$.

---

3 On se donne une fois pour toutes $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. On note A le module et α un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$, de sorte que : $\dfrac{c-a}{b-a} = A\,e^{i\alpha}$. On introduit de même B, C, β et γ pour lesquels : $\dfrac{a-b}{c-b} = B\,e^{i\beta}$ et $\dfrac{b-c}{a-c} = C\,e^{i\gamma}$.

Vous allez faire semblant de ne **rien** savoir sur les triangles, car il s'agit ici justement de **démontrer** complètement par le calcul quelques résultats bien qu'on connaît tous sans trop savoir pourquoi on les connaît. Pour une fois, je ne veux voir **aucun** raisonnement géométrique !

1) a) Calculer la somme $\alpha + \beta + \gamma$ modulo 2π, ainsi que le produit $A \times B \times C$.

b) Montrer que : $A\cos\alpha + \dfrac{\cos\beta}{B} = 1$ et $A\sin\alpha - \dfrac{\sin\beta}{B} = 0$.

On **admet** les relations analogues : $B\cos\beta + \dfrac{\cos\gamma}{C} = 1$, $B\sin\beta - \dfrac{\sin\gamma}{C} = 0$, $C\cos\gamma + \dfrac{\cos\alpha}{A} = 1$ et $C\sin\gamma - \dfrac{\sin\alpha}{A} = 0$.

2) On souhaite **démontrer** l'équivalence suivante : $|a-b| = |b-c| = |c-a| \iff \alpha \equiv \beta \equiv \gamma\ [2\pi]$. Par définition, le triangle abc (ou bca ou cab) sera alors dit *équilatéral* s'il satisfait l'une ou l'autre des deux conditions équivalentes.

a) Montrer l'implication directe.

b) On fait l'hypothèse, réciproquement, que : $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma\ [2\pi]$.

i) Montrer que α est congru à $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$ ou π modulo 2π.

ii) Montrer qu'en fait : $\alpha \not\equiv \pi\ [2\pi]$.

iii) En déduire que : $A = B = C = 1$, puis conclure.

3) Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\alpha \in \,]0, \pi[+ 2\pi\mathbb{Z}$. (ii) $\beta \in \,]0, \pi[+ 2\pi\mathbb{Z}$. (iii) $\gamma \in \,]0, \pi[+ 2\pi\mathbb{Z}$.

Par définition, le triangle abc (ou bca ou cab) est dit *direct* s'il l'une quelconques de ces trois assertions.

4) **a)** Montrer que le triangle abc est équilatéral direct si et seulement si : $c - a = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(b-a)$.

En d'autres termes, il est maintenant DÉMONTRÉ que le triangle abc est équilatéral direct si et seulement si la rotation de centre a et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ envoie le point b sur le point c.

b) Montrer que le triangle abc est équilatéral direct si et seulement si : $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$.

Pour tous $u, v, w \in \mathbb{C}$, on appelle *centre de gravité du triangle uvw* le nombre complexe $\dfrac{u+v+w}{3}$.

5) On suppose dans cette question que le triangle abc est direct. On note d, e et f les trois nombres complexes pour lesquels les triangles dba, ecb et fac sont équilatéraux directs, et p, q et r les centres de gravité respectifs des triangles dba, ecb et fac.

a) Déterminer une expression de p en fonction de a et b, de q en fonction de b et c, et de r en fonction de c et a.

b) Montrer que le triangle pqr est équilatéral direct.

c) Montrer que abc et pqr ont le même centre de gravité.

Le résultat des questions **b)** et **c)** est généralement appelé le *théorème de Napoléon*.

---

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ sur $[0, \pi]$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer une forme factorisée de S_n' sur $]0, \pi]$.

b) Déterminer les zéros de S_n' dans $[0, \pi]$.

2) Soient $n \geqslant 2$ et $\theta \in [0, \pi]$ un zéro de la fonction S_n'.

Remarque : En dépit des apparences, cette question est indépendante du résultat de la question **1)b)**.

a) Factoriser la différence : $\sin\left(kx + \dfrac{x}{2}\right) - \sin\left((k-1)x + \dfrac{x}{2}\right)$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que : $\sin\left(n\theta + \dfrac{\theta}{2}\right) = \sin\dfrac{\theta}{2}$.

c) Quelles sont les valeurs possibles de $\sin(n\theta)$? En déduire que : $S_n(\theta) \geqslant S_{n-1}(\theta)$.

3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est dérivable sur $[a, b]$, que f' est continue sur $[a, b]$ et que f' s'annule exactement r fois sur $[a, b]$. On note $x_1, \ldots, x_r$ ces zéros de f' rangés dans l'ordre : $x_1 < \ldots < x_r$ et on pose : $x_0 = a$ et $x_{r+1} = b$ — avec éventuellement : $x_0 = x_1$ ou $x_r = x_{r+1}$.

a) Que dire du signe de f' sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![0, r]\!]$? En déduire que f possède un minimum sur $[a, b]$.

b) Soit c un point en lequel f atteint son minimum. On suppose c distinct de a et b. Montrer, en revenant à la définition du nombre dérivé, que : $f'(c) = 0$. À quel endroit dans la preuve a-t-il été important que c soit distinct de a et b ?

4) Démontrer par récurrence que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} > 0$ (*inégalité de Fejér-Jackson*).
