DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **4)** suivantes sont indépendantes.

1) a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x-\ln(1-x)}$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^\alpha+1}-x\right)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$. Si vous n'y arrivez pas en général, faites-le au moins pour $\alpha\in\{1,2\}$.

2) Résoudre l'inéquation $\sin(2x)\leqslant 2\cos^2 x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

3) a) Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) En déduire que $4\,\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{3}=2\pi-\mathrm{Arccos}\,\dfrac{17}{81}$.

4) Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $z\in\mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n=n\left(z^n+1\right)$.

---

2 On s'intéresse aux points fixes de l'exponentielle complexe, i.e. aux nombres complexes z pour lesquels $\mathrm{e}^z=z$. On note pour cela φ la fonction $t\longmapsto t\,\mathrm{e}^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

1) Soit $z\in\mathbb{C}$ un point fixe de l'exponentielle complexe de partie imaginaire positive. On pose $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$.

a) Identifier les parties réelle et imaginaire dans la relation $\mathrm{e}^z=z$, puis montrer que pour un certain $k\in\mathbb{N}$:

$$y=2k\pi+\mathrm{Arccos}\,\varphi(x).$$

b) Montrer que : $\mathrm{e}^x\sqrt{1-\varphi(x)^2}-\mathrm{Arccos}\,\varphi(x)=2k\pi$.

2) On note à présent Δ la fonction $t\longmapsto \mathrm{e}^t\sqrt{1-\varphi(t)^2}-\mathrm{Arccos}\,\varphi(t)$.

a) Étudier les variations de φ, puis montrer que Δ a pour ensemble de définition un intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) Justifier proprement la dérivabilité de Δ sur $]\alpha,+\infty[$, puis montrer que pour tout $t>\alpha$: $\Delta'(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^{2t}-2t+1\right)}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}}$.

c) En déduire que l'équation $\Delta(t)=2k\pi$ d'inconnue $t\in[\alpha,+\infty[$ possède une et une seule solution x_k pour tout $k\in\mathbb{N}$.

On pose $y_k=2k\pi+\mathrm{Arccos}\,\varphi(x_k)$ et $z_k=x_k+iy_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

d) Montrer que $\mathrm{e}^{z_k}=z_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

3) Déterminer les points fixes de partie imaginaire négative de l'exponentielle complexe.

---

3 Dans tout ce problème, I est un intervalle de la forme $[0,\alpha[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ou $\alpha = +\infty$.

On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *absolument monotone sur I* si elle est indéfiniment dérivable sur I et si ses dérivées successives sont toutes positives sur I, i.e. si $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$. Par exemple, la fonction exponentielle est absolument monotone sur $\mathbb{R}_+$.

On notera $\mathscr{A}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles absolument monotones sur I.

1) Montrer que $\mathscr{A}(I,\mathbb{R})$ est *stable par dérivation*, i.e. que pour tout $f \in \mathscr{A}(I,\mathbb{R})$: $\quad f' \in \mathscr{A}(I,\mathbb{R})$.

2) **a)** Calculer par récurrence les dérivées successives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

b) En déduire que la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$ est absolument monotone sur $[0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note φ_n la fonction $x \longmapsto \ln(1-x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ et ψ_n la fonction $x \longmapsto \varphi_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ sur $[0,1[$.

c) Factoriser φ_n' et ψ_n' pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$: $\quad -\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \leqslant \ln(1-x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \leqslant 0$, $\quad$ puis que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

3) On souhaite prouver par récurrence la proposition $\mathscr{P}_n$ suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall f \in \mathscr{A}(I,\mathbb{R}), \quad \forall a, x \in I, \qquad \left(x \geqslant a \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \leqslant f(x) \right).$$

a) **Initialisation :** Montrer que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. Soient $f \in \mathscr{A}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

b) Montrer que pour tout $x \in I \cap [a,+\infty[$: $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \leqslant f(x)$ $\quad$ en étudiant la fonction $x \longmapsto f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$.

4) On souhaite prouver par récurrence la proposition $\mathscr{Q}_n$ suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall f \in \mathscr{A}(I,\mathbb{R}), \quad \forall x \in I, \quad f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \leqslant \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

a) **Initialisation :** Montrer que $\mathscr{Q}_0$ est vraie en comparant le graphe de la fonction choisie et celui d'une de ses tangentes.

b) **Hérédité :** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{Q}_n$ est vraie, alors $\mathscr{Q}_{n+1}$ l'est aussi.

5) Pour tout $\lambda > 1$, on pose $I(\lambda) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \quad \lambda x \in I \right\}$. Soit $f \in \mathscr{A}(I,\mathbb{R})$.

a) Vérifier que pour tout $\lambda > 1$: $\quad I(\lambda) \subset I$.

b) Déduire des résultats précédents que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 1$ et $x \in I(\lambda)$: $\quad \dfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\,x^{n+1} \leqslant \dfrac{f(\lambda x)}{(\lambda-1)^{n+1}}$.

c) En déduire que si $\alpha = +\infty$, i.e. $I = \mathbb{R}_+$, alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \quad \textit{(théorème de Bernstein)}.$$

d) Montrer que cette égalité est vraie pour tout $x \in I(2)$ si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, le théorème de Bernstein est en réalité valable sur I tout entier et pas seulement sur $I(2)$, mais nous manquons de matériel à ce stade. Appliqué à la fonction exponentielle, le théorème énonce que pour tout $x \geqslant 0$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$