DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)** et **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\quad \operatorname{sh} x + \sin x \geqslant 2x$.

2) Exprimer $\operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ en fonction de $\operatorname{Arctan} e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ après avoir dérivé soigneusement les deux fonctions $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ et $x \longmapsto \operatorname{Arctan} e^x$.

3) Montrer que : $\quad 2 \operatorname{Arcsin} \dfrac{3}{5} = \operatorname{Arccos} \dfrac{7}{25}$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin^2 \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\left(1 + \cos^n \frac{\pi}{n}\right)$.

---

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $x \longmapsto \sin^{n+1} x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. La fonction f_n croît de $f_n(0) = 0$ à $f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ mais pas toujours à la même vitesse, et on s'intéresse dans cet exercice à la pente maximale M_n des tangentes de f_n.

1) Montrer que la pente maximale M_n est atteinte en $\operatorname{Arctan} \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) **a)** Déterminer une forme simple de $\cos \operatorname{Arctan} t$ et $\sin \operatorname{Arctan} t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad M_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n}}$.

c) En déduire que : $\quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{M_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. $\quad$ En résumé, M_n est proche de la quantité $\sqrt{\dfrac{n}{e}}$ lorsque n est grand.

3) **a)** Exprimer $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$ en fonction de $\operatorname{Arctan} x$ pour tout $x > 0$.

b) Calculer : $\quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \sqrt{n}\right)$.

---

3 On pose : $\quad \mathcal{H} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\right\} \quad$ et $\quad \mathcal{E} = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc > 0\right\}$. $\quad$ L'ensemble $\mathcal{H}$ est appelé le *demi-plan de Poincaré*.

On appelle *homographie de $\mathcal{H}$* toute fonction définie sur $\mathcal{H}$ de la forme $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathcal{E}$.

1) Vérifier que $z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$ est une homographie de $\mathcal{H}$, ainsi que les fonctions $z \longmapsto az + b$ pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

2) Soit $h : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ une homographie de $\mathcal{H}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathcal{E}$.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathcal{H}$: $\quad \operatorname{Im}\big(h(z)\big) = \lambda \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ $\quad$ où λ est un réel indépendant de z à préciser.

b) En déduire que h est à valeurs dans $\mathcal{H}$.

On définit des parties de $\mathcal{H}$, appelées les *droites de $\mathcal{H}$*, en posant pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$:

$$D_1(x) = \left\{x + iy \mid y > 0\right\} \qquad \text{et} \qquad D_2(x,r) = \left\{x + re^{i\theta} \mid \theta \in]0,\pi[\right\}.$$

On rappelle que pour toute partie D de $\mathbb{C}$, toute fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et toute partie D' de D, on appelle *image de D' par f* et on note $f(D')$ l'ensemble : $\quad f(D') = \left\{f(x) \mid x \in D'\right\}$. $\quad$ Par exemple, en notant exp la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ et $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs : $\quad \exp(i\mathbb{R}) = \left\{e^z \mid z \in i\mathbb{R}\right\} = \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{U}$.

3) Représenter graphiquement les ensembles $D_1(x)$ et $D_2(x,r)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

4) Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On note h l'homographie $z \longmapsto az + b$ de $\mathscr{H}$. Compléter pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$:
$$h\big(D_1(x)\big) = D_1(\ldots) \qquad \text{et} \qquad h\big(D_2(x,r)\big) = D_2(\ldots\ ,\ \ldots).$$

On note désormais φ l'homographie $z \longmapsto -\dfrac{1}{z}$ de $\mathscr{H}$.

5) a) Déterminer $\varphi\big(D_1(0)\big)$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$: $\quad \varphi\big(D_2(x,x)\big) = D_1\left(-\dfrac{1}{2x}\right)$. On pourra commencer par montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\varphi\big(x + x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) + \dfrac{1}{2x}$ est un imaginaire pur.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\varphi\big(D_1(x)\big)$ est une droite de $\mathscr{H}$ que l'on précisera. On pourra commencer par mettre $\varphi(x + \mathrm{i}y) + \dfrac{1}{2x}$ sous forme trigonométrique pour tout $y > 0$, en distinguant bien les cas : $\quad x > 0 \quad$ et $\quad x < 0$.

On ADMET pour gagner du temps que $\varphi\big(D_2(-x,x)\big)$ est également une droite de $\mathscr{H}$ pour tout $x > 0$.

6) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ distinct de $|x|$.

a) **(Difficile)** Montrer que pour tout $z \in \mathscr{H}$: $\qquad |z - x| = r \iff \left|z' - \dfrac{x}{r^2 - x^2}\right| = \dfrac{r}{\left|r^2 - x^2\right|} \qquad$ où : $z' = \varphi(z)$.

b) En déduire que $\varphi\big(D_2(x,r)\big)$ est une droite de $\mathscr{H}$ que l'on précisera.

D'après les questions **5)** et **6)**, φ envoie finalement toute droite de $\mathscr{H}$ sur une droite de $\mathscr{H}$.

7) Montrer que toute homographie de $\mathscr{H}$ envoie toute droite de $\mathscr{H}$ sur une droite de $\mathscr{H}$. On pourra observer que pour tous $(a,b,c,d) \in \mathscr{E}$ et $z \in \mathscr{H}$: $\quad \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad - bc}{c^2 z + cd} \quad$ si : $\quad c \neq 0$.

---

4 **(Difficile)** Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir TRÈS BIEN RÉUSSI tout le reste !

On pose : $\quad \theta = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{4}$. Montrer que $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel. On pourra commencer par montrer par récurrence double l'existence d'une suite $(p_k)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs pour laquelle pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad \cos(k\theta) = \dfrac{p_k}{2^{2k}}$, $\quad$ puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad p_k \equiv 2^{k-1}\ \big[2^k\big]$.

On pourrait montrer par une méthode analogue que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $\dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est rationnel si et seulement si : $n \in \big\{1, 2, 4\big\}$.
