DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)** et **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Exprimer $\mathrm{Arcsin}\,\sqrt{1-x}$ en fonction de $\mathrm{Arcsin}\,(2x-1)$ pour tout réel x pour lequel ces expressions ont un sens. On pourra commencer par les dériver soigneusement toutes les deux.

3) Montrer que : $\quad 2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$.

4) On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier le signe de f'' et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:
$$\frac{\ln x}{x-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

---

2 On pose $I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer, en faisant une IPP puis un changement de variable, que : $\quad I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+u^3}\,\mathrm{d}u$.

2) Calculer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ du polynome X^3+1, puis montrer que : $\quad I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}+\dfrac{\ln 2}{2}$.

3) Soient $a,b\in\mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a<b$ et $f\in\mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ une fonction strictement croissante.

a) Montrer que f est bijective de $[a,b]$ sur son image (à préciser), puis que : $\quad \displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

b) En déduire une relation entre $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

4) Déduire des résultats précédents la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

---

3 Soit $n\geqslant 2$ fixé. On pose une fois pour toutes $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$: $\quad P(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\sin(k\theta)z^k$.

1) a) Montrer que pour un certain réel α à préciser : $\quad P(1)=2^n\cos^n\alpha$.

b) Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) On pose pour tout $z\in\mathbb{C}$: $\quad Q(z)=\left(z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1\right)^n-\left(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+1\right)^n$.

a) Exprimer $Q(z)$ en fonction de $P(z)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

b) En déduire que pour toute racine complexe z de P : $\quad \left|z+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|=\left|z+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right|$.

c) En déduire que les racines de P sont toutes réelles.

3) a) Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$. Exprimer sans démonstration un argument de $a+\mathrm{i}b$ à l'aide de la fonction arctangente.

b) En déduire une forme trigonométrique de $x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1$ pour tout $x\in[-1,0]$.

c) En déduire que pour tout $x\in[-1,0]$: $\quad P(x)=\left(x^2+2x\cos\theta+1\right)^{\frac{n}{2}}\sin\left(n\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x\sin\theta}{1+x\cos\theta}\right)$.

d) Montrer que la fonction $x\longmapsto\dfrac{x\sin\theta}{1+x\cos\theta}$ est bijective de $[-1,0]$ sur $\left[-\dfrac{1}{t},0\right]$ où $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$.

e) Montrer que pour tout $x>0$: $\quad \mathrm{Arctan}\,x+\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

f) En déduire que la fonction $x\longmapsto n\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x\sin\theta}{1+x\cos\theta}$ est bijective de $[-1,0]$ sur $\left[-\dfrac{(n-1)\pi}{2},0\right]$.

g) En déduire le nombre de racines de P dans $[-1,0]$. On pourra distinguer le cas où n est pair du cas où il est impair.

4 **(Difficile)** Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

1) Montrer que : $\displaystyle\sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n} \frac{a_p a_q}{p+q+1} \geqslant 0$ en étudiant l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 P(x)^2 \, \mathrm{d}x$.

2) Calculer $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \, \mathrm{d}t\right)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, puis montrer que : $\displaystyle\int_0^\pi \left|P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$.

3) Montrer que pour toute fonction polynomiale Q à coefficients réels : $\displaystyle\int_{-1}^1 Q(x) \, \mathrm{d}x = -\mathrm{i} \int_0^\pi Q\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t$.

4) En déduire que : $\displaystyle\int_{-1}^1 P(x)^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$, puis que : $\displaystyle\sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n} \frac{a_p a_q}{p+q+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$ (*inégalité de Hilbert*).