Devoir surveillé

1

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad e^x \geqslant 1+x \quad$ en exploitant l'égalité de Taylor-Lagrange avec reste intégral — que l'on commencera par énoncer proprement en toute généralité.

2) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que l'équation : $\quad e^x = n - x \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une et une seule solution x_n.

3) Montrer que : $\quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

4) Montrer que : $\quad x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.

5) Montrer que : $\quad x_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln n - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

6) Montrer que pour un certain réel λ à préciser : $\quad x_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln n - \dfrac{\ln n}{n} + \lambda\, \dfrac{(\ln n)^2}{n^2} + o\left(\dfrac{(\ln n)^2}{n^2}\right)$.

---

2 On s'intéresse dans ce problème à un raffinement de la célèbre formule de Stirling — que l'on redémontre en passant :

Théorème (Formule de Stirling améliorée) $\quad n! \underset{n \to +\infty}{=} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\left(1 + \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad I_n = \displaystyle\int_1^n \left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\right) \frac{dt}{t}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\, dt = n \ln n - \ln(n!)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad I_n = \ln(n!) - n \ln n + n - \dfrac{\ln n}{2} - 1$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\, dx}{2n+1+x} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{x\, dx}{2n+1-x}$.

b) Déduire de cette double égalité que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad I_{n+1} - I_n = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2\, dx}{(2n+1)^2 - x^2}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \dfrac{1}{12(n+1)(n+2)} \leqslant I_n - I_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{12n(n+1)}$.

d) Montrer que les suites $\left(I_n - \dfrac{1}{12n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(I_n - \dfrac{1}{12(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note α leur limite commune.

e) Déterminer un développement asymptotique de I_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) a) Déduire des résultats précédents que pour un certain réel $\beta > 0$: $\quad n! \underset{n \to +\infty}{=} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \beta \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

b) Montrer enfin que : $\quad \beta = \sqrt{2\pi} \quad$ grâce à la *formule de Wallis*, que l'on **ADMET** : $\quad \dbinom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

---

3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1]$.

a) Montrer que : $\quad \displaystyle\int_\alpha^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{\frac{1+\alpha^2}{2}}^1 t^n \,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que : $\quad u_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha(n+1)} + \alpha\left(\dfrac{1+\alpha^2}{2}\right)^n$.

3) a) Proposer un exemple de suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $]0,1]$ pour laquelle : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 1 \quad$ et $\quad \beta_n^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que : $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

4

1) Déterminer un équivalent simple de : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^n k \sin\frac{k\pi}{n} \quad$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Soit $f \in \mathscr{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad x_{n,k} = \dfrac{k}{n}$.

a) Majorer pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0,n]\!]$ et $t \in [0,1]$ la quantité : $\quad \Big|f(t) - f(x_{n,k}) - f'(x_{n,k})(t - x_{n,k})\Big| \quad$ grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange.

b) En déduire une majoration de : $\quad \left|\displaystyle\int_{x_{n,k-1}}^{x_{n,k}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(x_{n,k})}{n} + \frac{f'(x_{n,k})}{2n^2}\right| \quad$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$.

c) En déduire que : $\quad \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

d) Quelle amélioration du résultat de la question **1)** en déduit-on ?
