Devoir surveillé

1 Montrer que la fonction $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \dfrac{\pi - x}{\sin x}\, e^{-\frac{1}{x}}$ est bornée sur $]0, \pi[$.

---

2 On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x+y)+f(x-y) = 2\big(f(x)+f(y)\big)$.

1) Soit $f \in \mathscr{F}$.

a) Calculer $f(0)$ et montrer que f est paire.

b) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$: $\quad f(rx) = r^2 f(x)$.

2) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F} \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $\quad a < b \quad$ et $f \in \mathscr{C}^2\big([a,b], \mathbb{R}\big)$. On suppose que : $\quad f(a) < 0 \quad$ et $\quad f(b) > 0 \quad$ et que f' et f'' sont toutes les deux strictement positives sur $[a,b]$. On pose pour tout $t \in [a,b]$: $\quad F(t) = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$.

a) Représenter une allure possible du graphe de f en expliquant bien de quelle manière chaque hypothèse la concernant est utilisée.

b) Montrer que f s'annule une et une seule fois sur $]a,b[$ — en un point noté z.

c) Montrer que pour tout $t \in [a,b]$, $F(t)$ est l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente de f en t.

d) Étudier les variations de F sur $[a,b]$ et montrer que l'intervalle $[z,b]$ est stable par F.

e) Montrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$: $\quad \big|f(x)\big| \leqslant K|x-z|$.

f) Montrer, en commençant par appliquer le théorème des accroissements finis à F, qu'il existe un réel $L > 0$ pour lequel pour tout $x \in [a,b]$: $\quad \big|F(x) - z\big| \leqslant L|x-z|^2$.

2) On note à présent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad u_0 = b \quad$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = F(u_n)$.

a) Compléter la figure de la question **1)a)** en représentant quelques termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Justifier la bonne définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étudier sa monotonie, puis montrer qu'elle converge vers z.

c) Sous l'hypothèse que : $\quad b - z \leqslant \dfrac{1}{2L}, \quad$ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_n - z| \leqslant \dfrac{1}{2^{2^n} L}$.

3) Déterminer une valeur **explicite** de n — sans partie entière ! — pour laquelle : $\quad \dfrac{1}{2^{2^n}} < 10^{-100}$.

La méthode d'approximation d'un zéro présentée dans cet exercice s'appelle la *méthode de Newton*. C'est l'exposant 2^n de la question **2)b)** qui la rend si puissante.

Par exemple, pour $r > 1$ fixé, la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x^2 - r$ satisfait les hypothèses de l'exercice sur $[1, r]$, avec pour unique zéro le réel $\sqrt{r}$. La fonction F associée est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{r}{2x}$ et pour tout $x \in [1, r]$: $\quad \big|F(x) - \sqrt{r}\big| \leqslant \dfrac{1}{2}\,\big|x - \sqrt{r}\big|^2$. La méthode de Newton coïncide ici avec la vénérable *méthode des Babyloniens* et permet un calcul approché extrêmement rapide de $\sqrt{r}$.

4

1) L'égalité de Taylor-Lagrange : Soient $x > 0$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}\big([0,x],\mathbb{R}\big)$.

a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction $t \overset{\delta}{\longmapsto} f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k - \frac{A}{(n+1)!}\, t^{n+1}$ s'annule en x.

b) Calculer $\delta^{(p)}(0)$ pour tout $p \in [\![0,n]\!]$ et $\delta^{(n+1)}(t)$ pour tout $t \in [0,x]$.

c) En déduire l'existence d'un réel $c \in \,]0,x[$ pour lequel : $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$ (*égalité de Taylor-Lagrange*).

Pour tout intervalle non vide I, on dit qu'une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est *absolument monotone sur* I si pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$: $\quad f^{(n)}(x) \geqslant 0$. L'ensemble de ces fonctions sera noté $\mathscr{A}(I)$. Par exemple, la fonction exponentielle est absolument monotone sur $\mathbb{R}$. En outre, la dérivée d'une fonction absolument monotone est encore absolument monotone.

On s'intéresse dans la suite de ce problème à quelques exemples de fonctions absolument monotones ainsi qu'à certaines de leurs propriétés.

2) Propriétés de stabilité et premiers exemples :

a) Montrer que la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$ est absolument monotone sur $[0,1[$.

b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}(I)$ est stable par produit pour tout intervalle non vide I.

c) Montrer que la fonction tangente est absolument monotone sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

d) Pour quelles valeurs du réel α la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est-elle absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$?

3) L'exemple de la fonction arcsinus :

a) Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\mathrm{Arcsin}^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\big(1-x^2\big)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

On ADMET pour ne pas perdre de temps que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad P_{n+2} = (2n+1)XP_{n+1} + n^2\big(1-X^2\big)P_n$. On pourra commencer par remarquer que pour tout $x \in \,]-1,1[$: $\quad \big(1-x^2\big)\,\mathrm{Arcsin}''(x) = x\ \mathrm{Arcsin}'(x)$.

c) En déduire que la fonction arcsinus est absolument monotone sur $[0,1[$.

d) Calculer une expression explicite à base de factorielles du réel $\mathrm{Arcsin}^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Le théorème de Bernstein : Soient $\alpha > 0$ et f une fonction absolument monotone sur $[0,\alpha[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la fonction définie par : $\quad R_n(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$ $\quad$ et pour tout $x \in \,]0,\alpha[$: $\quad R_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}}\left(f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right)$.

a) Montrer que R_n est continue en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer par récurrence que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,\alpha[$: $\quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(xt)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que R_n est croissante sur $[0,\alpha[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x,y \in [0,\alpha[$ avec $x < y$: $\quad 0 \leqslant f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

e) En déduire que pour tout $x \in [0,\alpha[$: $\quad f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ $\quad$ (*théorème de Bernstein*).

Le résultat ainsi obtenu s'appelle le *développement en série entière de f au voisinage de* 0.

On suppose à présent que f est absolument monotone sur $]-\alpha,\alpha[$ et on note g la fonction $x \longmapsto f(x) + f(-x)$.

f) Montrer que g est absolument monotone sur $[0,\alpha[$.

g) En déduire que le résultat de la question **e)** reste valable pour tout $x \in \,]-\alpha,0[$.

h) Montrer pour finir l'égalité : $\quad \pi = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \frac{1}{16^k(2k+1)}$.