Devoir surveillé

1 Les questions **1)** et **2)** suivantes sont indépendantes.

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \quad \left(X^2+1\right)P' = \lambda X P \right\}$.

a) Déterminer E_0 et E_1.

b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$: $\quad E_\lambda = \{0\}$.

c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$: $\quad P \in E_n \quad \Longleftrightarrow \quad \left(X^2+1\right)P \in E_{n+2}$.

d) En déduire une description explicite de E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Combien le groupe symétrique S_n contient-il d'éléments pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Justifier soigneusement.

b) Dresser la liste des éléments de S_3 et montrer que S_3 n'est pas commutatif.

c) Montrer que les groupes S_3 et $\mathbb{U}_6$ ne sont pas isomorphes.

d) Montrer que l'application $(u,v) \longmapsto uv$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3$ sur $\mathbb{U}_6$.

---

2 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A possède un polynôme annulateur de degré 2 et en déduire une expression explicite coefficient par coefficient de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On souhaite retrouver le résultat de la question **1)** par une autre méthode.

a) Résoudre le système linéaire $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

b) Résoudre le système linéaire $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

On pose : $\quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et on note P la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de colonnes C_1, C_2 et C_3.

c) Vérifier que C_1, C_2 et C_3 sont chacun solutions de l'un des systèmes des questions **a)** et **b)**, puis déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle $AP = PD$.

d) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

e) Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis expliquer comment on peut recalculer A^n. On ne demande pas le détail coefficient par coefficient de ce dernier calcul.

Remarque : Pour justifier l'intérêt des systèmes des questions **a)** et **b)**, on aurait pu résoudre plus généralement le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Il serait apparu que pour λ différent de 1 et 2, ce système admet $(0,0,0)$ pour seule solution.

---

3 On appelle *fonction cotangente* et on note cotan la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, dont on **ADMET** qu'elle est strictement décroissante sur $]0,\pi[$.

1) a) Déterminer les racines de $(X+1)^n - (X-1)^n$ pour tout $n \geqslant 2$, puis montrer soigneusement que pour un certain réel α_n à préciser : $\quad (X+1)^n - (X-1)^n = \alpha_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X + \mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\,\frac{k\pi}{n} \right)$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$.

c) Que vaut $\mathrm{cotan}(\pi - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$? En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\quad \mathrm{cotan}^2 x \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \mathrm{cotan}^2 x \quad$ en se ramenant à des inégalités de convexité de fonctions usuelles.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

---

4 On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un groupe commutatif pour la loi usuelle d'addition des suites.
Pour toutes suites $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $x \star y$ la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\displaystyle (x \star y)_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$.
Par exemple : $(x \star y)_0 = x_0 y_0$ et $(x \star y)_1 = x_0 y_1 + x_1 y_0$.

1) **a)** Montrer que la loi $\star$ est commutative.

b) On note δ la suite définie par $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que δ est neutre pour la loi $\star$.

c) Montrer que la loi $\star$ est associative.

d) Rappeler la définition d'un anneau.

On **ADMET** sans davantage de vérifications, pour gagner du temps, que le triplet $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \star\right)$ est un anneau et c'est désormais dans cet anneau qu'on travaille.

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non nulles.

a) Justifier l'existence de $p = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \quad x_n \neq 0\right\}$ et $q = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \quad y_n \neq 0\right\}$.

b) Calculer $(x \star y)_{p+q}$. Qu'en déduit-on sur l'anneau $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \star\right)$?

3) Montrer que l'ensemble $\mathscr{X} = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \quad \exists A > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_n| \leqslant A^n\right\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4) **a)** Soit $x \in \mathrm{U}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. Montrer que $x_0 \neq 0$ et que l'inverse de x satisfait une relation de récurrence forte.

b) Montrer que $\mathrm{U}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \quad x_0 \neq 0\right\}$.

5) On pose enfin $\mathscr{G} = \left\{x \in \mathscr{X} \mid \quad x_0 = 1\right\}$.

a) Soit $x \in \mathscr{G}$. On note y son inverse. Par définition, il existe un réel $A > 0$ pour lequel $|x_n| \leqslant A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $|y_n| \leqslant (2A)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $y \in \mathscr{G}$.

b) En déduire que $\mathscr{G}$ est un sous-groupe de $\mathrm{U}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$.