Devoir surveillé

1 Les questions **1)** et **2)** suivantes sont indépendantes.

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \quad \left(X^2+1\right)P' = \lambda XP\right\}$.

a) Déterminer E_0 et E_1.

b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$: $\quad E_\lambda = \{0\}$.

c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$: $\quad P \in E_n \quad \Longleftrightarrow \quad \left(X^2+1\right)P \in E_{n+2}$ et en déduire une description explicite de E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que A possède un polynôme annulateur de degré 2 et en déduire une expression explicite coefficient par coefficient de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

2 Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est *définie positive* si pour toute colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle : $\quad X^\top MX > 0$, ce qui revient ausi à dire que pour toute colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\quad X^\top MX \geqslant 0 \quad$ avec égalité si et seulement si $X = 0$.

1) a) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\quad m_{ii} > 0$.

b) À quelle condition nécessaire et suffisante une matrice diagonale est-elle symétrique définie positive ?

c) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice $A^\top A$ est symétrique définie positive.

d) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice $P^\top MP$ est symétrique définie positive.

2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

a) Déterminer, en exploitant les opérations élémentaires, une matrice triangulaire supérieure P à coefficients diagonaux tous égaux à 1 pour laquelle les premières ligne et colonne de $P^\top MP$ sont nulles hors coefficient diagonal.

b) Montrer que pour une certaine matrice triangulaire supérieure Q à coefficients diagonaux tous égaux à 1, la matrice $Q^\top MQ$ est diagonale à coefficients strictement positifs.

c) En déduire qu'on peut écrire M sous la forme $M = T^\top T$ pour une certaine matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux strictement positifs (existence de la *décomposition de Cholesky de M*).

3) Soient $T_1, T_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. On suppose que $T_1^\top T_1 = T_2^\top T_2$ et on pose $T = T_1 T_2^{-1}$.

a) Montrer que T est triangulaire supérieure.

b) Montrer que $T_1 = T_2$ (unicité de la *décomposition de Cholesky*).

---

3 On appelle *fonction cotangente* et on note cotan la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad (X+1)^n - (X-1)^n = \alpha_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X + \mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\,\frac{k\pi}{n}\right) \quad$ où α_n est un réel à préciser.

b) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour tout $n \geqslant 2$.

c) Que vaut $\mathrm{cotan}(\pi - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$? En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\quad \mathrm{cotan}^2 x \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \mathrm{cotan}^2 x \quad$ en se ramenant à des inégalités de convexité de fonctions usuelles.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

---

4 Dans ce problème, les lettres A et B désignent des anneaux **COMMUTATIFS NON NULS** quelconques et $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle *idéal de A* tout sous-groupe additif I de A pour lequel $ax \in I$ pour tous $a \in A$ et $x \in I$. La notion d'idéal est l'objet principal de cet exercice, dont on présente quelques exemples et usages.

1) **a)** Que dire d'un idéal de A qui contient un élément inversible ?

b) Montrer que $\{ax \mid a \in A\}$, noté (x), est un idéal de A pour tout $x \in A$. Un tel idéal est dit *monogène*.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$ est un idéal de A pour tout morphisme d'anneaux f de A dans B.

d) Montrer que A est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont $\{0_A\}$ et A.

2) On dit que A est *euclidien* si A est intègre et s'il existe une application $\varphi : A \setminus \{0_A\} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour laquelle :

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in A \setminus \{0_A\}, \quad \exists (q,r) \in A \times A, \quad a = bq + r \quad \text{et} \quad \big(r = 0_A \quad \text{ou} \quad \varphi(r) < \varphi(b)\big).$$

a) Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont euclidiens.

Soient A un anneau euclidien et I un idéal de A. On suppose $I \neq \{0_A\}$.

b) Montrer que l'ensemble $\varphi\big(I \setminus \{0_A\}\big)$ possède un plus petit élément $\varphi(x)$ avec $x \in I \setminus \{0_A\}$.

c) Montrer que $I = (x)$.

En résumé, les idéaux d'un anneau euclidien sont tous monogènes.

3) Soit I un idéal de A. Pour tous $x, y \in A$, on dit que x *est congru à y modulo I*, ce qu'on note $x \equiv y\ [I]$, si $x - y \in I$.

a) Montrer que la relation $\equiv [I]$ est une relation d'équivalence sur A et décrire la classe d'équivalence de x associée, notée $\overline{x}$, pour tout $x \in A$.

On note à présent $\dfrac{A}{I} = \{\overline{x} \mid x \in A\}$ l'ensemble quotient de A par la relation $\equiv [I]$.

b) Montrer que pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$, si $\overline{x_1} = \overline{x_2}$ et $\overline{y_1} = \overline{y_2}$, alors $\overline{x_1 + y_1} = \overline{x_2 + y_2}$ et $\overline{x_1 y_1} = \overline{x_2 y_2}$.

c) Pourquoi le résultat de la question **b)** permet-il de définir deux lois $+$ et $\times$ sur $\dfrac{A}{I}$ par les relations $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ et $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{xy}$ pour tous $x, y \in A$?

d) Rappeler la définition d'un anneau et vérifier que $\dfrac{A}{I}$ est un groupe commutatif pour la loi $+$ définie en **c)**.

On **ADMET** sans plus de vérifications, pour gagner du temps, que $\dfrac{A}{I}$ est un anneau commutatif pour les lois $+$ et $\times$ définies en **c)**. On l'appelle le *quotient de A par I*.

e) Montrer que l'application $x \longmapsto \overline{x}$ est un morphisme d'anneaux surjectif de A sur $\dfrac{A}{I}$ et déterminer son noyau.

4) On conserve les notations de la question **3)** dans le cas particulier où $A = \mathbb{Z}[X]$ et $I = \big(X^2 - 2\big)$. Montrer que tout élément de $\dfrac{A}{I}$ s'écrit $a\overline{X} + b\overline{1}$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$ et calculer $\overline{X}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) **a)** Montrer que l'ensemble $\mathrm{Nil}(A) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad x^n = 0_A\}$ des éléments nilpotents de A est un idéal de A.

b) Déterminer les éléments nilpotents de l'anneau quotient $\dfrac{A}{\mathrm{Nil}(A)}$.

6) Soit f un morphisme d'anneaux de A dans B. D'après **1)c)**, $\mathrm{Ker}\, f$ est un idéal de A et on note π le morphisme d'anneaux de la question **4)e)** associé.

a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-anneau de B.

b) Montrer l'existence d'un morphisme d'anneaux g de $\dfrac{A}{\mathrm{Ker}\, f}$ dans B pour lequel $f = g \circ \pi$.

c) Montrer plus précisément que g est un isomorphisme d'anneaux de $\dfrac{A}{\mathrm{Ker}\, f}$ sur $\mathrm{Im}\, f$.

7) **a)** Montrer que les anneaux $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(X - \lambda)}$ et $\mathbb{K}$ sont isomorphes pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ en appliquant le résultat de la question **6)c)** à un morphisme d'anneaux bien choisi.

b) Montrer de même que les anneaux $\dfrac{\mathbb{R}[X]}{\big(X^2 + 1\big)}$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes.