Devoir surveillé

1 Les questions **1)** et **2)** suivantes sont indépendantes.

1) On pose $M_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ p & 1 & p \end{pmatrix}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

a) À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice M_p est-elle inversible ? Le calcul de M_p^{-1} n'est pas demandé.

b) Résoudre le système linéaire $M_2 X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On donnera le résultat sous forme de Vect.

2) On pose $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

a) Déterminer le degré et deux racines entières de P, puis montrer que j en est racine.

b) Déterminer la forme scindée de P sur $\mathbb{C}$.

2

1) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls. Construire explicitement, par exemple grâce à des opérations élémentaires, une matrice inversible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de première colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

2) Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice p. En d'autres termes, $A^p = 0$ mais $A^{p-1} \neq 0$.

a) Montrer que $A^{p-1}X \neq 0$ pour une certaine colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, fixée par la suite.

D'après **1)**, on peut se donner une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de première colonne $A^{p-1}X$. On note alors A' la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue par suppression des premières ligne et colonne de $P^{-1}AP$.

b) Que peut-on dire de la première colonne de $P^{-1}AP$? Montrer que A' est nilpotente et que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A')$.

3) **a)** Montrer par récurrence <u>**SUR** n</u> que pour toute matrice nilpotente $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\quad \mathrm{tr}(A) = 0$.

b) En déduire que pour toute matrice nilpotente $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad \mathrm{tr}\left(A^k\right) = 0$.

Réciproquement, on peut montrer — mais pas avant quelques mois — que toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle $\mathrm{tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ est nilpotente.

---

3 On s'intéresse dans ce problème à l'*équation de Pell-Fermat* $x^2 - 3y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
Afin de la résoudre, on pose $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{ a + b\sqrt{3} \mid \quad a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

1) **a)** Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel, puis que pour tout $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, il existe un et un seul couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ pour lequel $x = a + b\sqrt{3}$.

L'élément $a - b\sqrt{3}$ est alors appelé le *conjugué de* x et noté $\overline{x}$. Cette définition ne pose aucun problème d'ambiguïté vis-à-vis du choix de a et b car le couple (a, b) est unique. Attention, rien à voir avec la conjugaison complexe !

c) Montrer que l'application $x \longmapsto \overline{x}$ est un automorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, on appelle *norme de* x et on note $N(x)$ le réel $x\overline{x}$.

a) Montrer que pour tous $x, x' \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$: $\quad N(xx') = N(x)N(x') \quad$ et $\quad N(x) \in \mathbb{Z}$.

b) On pose $G = \left\{ x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \mid \quad x > 0 \quad \text{et} \quad N(x) = 1 \right\}$. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$.

3) Soit $x = a + b\sqrt{3} \in G \cap]1, +\infty[$.

a) Montrer que $a > 0$.

b) Montrer que $x^2 = 1 + 2bx\sqrt{3}$, puis que $b > 0$.

c) En déduire que $2 + \sqrt{3}$ est le plus petit élément de $G \cap]1, +\infty[$.

4) a) Soit $x \in G$. Montrer que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n \leqslant x < \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, puis que $x = \left(2+\sqrt{3}\right)^n$.

b) En déduire que $G \cap [1, +\infty[= \left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n \mid \quad n \in \mathbb{N}\right\}$. Attention, l'intervalle est fermé cette fois.

c) Exhiber une bijection de l'ensemble des solutions de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - 3y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ sur $G \cap [1, +\infty[$.

---

4 On rappelle que la composition des polynômes est associative et que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, si Q est non constant, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.

1) On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des polynômes de degré 1 de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $(\mathscr{G}, \circ)$ est un groupe. Que vaut l'inverse G^{-1} d'un polynôme $G = aX + b \in \mathscr{G}$ au sens de la composition ?

À présent, quelques notations.

— On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}[X]$ pour lesquelles $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Pour toutes suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{S}$, on dit que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est semblable à $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'il existe un polynôme $G \in \mathscr{G}$ pour lequel $P_n = G \circ Q_n \circ G^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On **ADMET** pour gagner du temps que la relation ainsi définie est une relation d'équivalence sur $\mathscr{S}$.

— Pour toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{S}$, on dit que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *commutante* si $P_m \circ P_n = P_n \circ P_m$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$. Par exemple, la suite $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est commutante car pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \deg\left(X^n\right) = n \quad$ et $\quad X^m \circ X^n = X^{mn} = X^n \circ X^m$.

2) Montrer que pour toutes suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{S}$, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est commutante et semblable à $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, alors $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est commutante.

3) Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}_r$ l'ensemble des polynômes non constants $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels $P \circ \left(X^2 + r\right) = \left(X^2 + r\right) \circ P$. Dans les questions **a)**, **b)** et **c)**, un réel r est fixé.

a) Montrer que tout élément de $\mathscr{C}_r$ est unitaire.

b) Soient $Q_1, Q_2 \in \mathscr{C}_r$ de même degré. Montrer que $Q_1 = Q_2$ en étudiant le degré de $Q_1 \circ \left(X^2 + r\right) - Q_2 \circ \left(X^2 + r\right)$.

c) Montrer que si $\mathscr{C}_r$ contient un polynôme de degré 3, alors r vaut 0 ou -2.

d) Montrer que $\mathscr{C}_0 = \left\{X^n \mid \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n et appelé le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev*.

4) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est commutante.

5) a) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2. Montrer qu'il existe un et un seul couple $(G, r) \in \mathscr{G} \times \mathbb{R}$ pour lequel $G \circ P \circ G^{-1} = X^2 + r$.

En poussant le calcul jusqu'au bout pour $P = T_2$, on obtient $r = -2$. On l'**ADMET**.

b) Montrer que les suites $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas semblables.

6) Montrer que toute suite commutante de $\mathscr{S}$ est semblable à $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (*théorème de Block-Thielmann*).
