Devoir surveillé

1 On pose : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) a) Résoudre le système linéaire : $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en trouver une solution C_1 de la forme $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre le système linéaire : $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en trouver une solution C_3 de la forme $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, le système linéaire : $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour seule solution.

d) Déterminer une colonne C_2 de la forme $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -1 \end{pmatrix}$ pour laquelle : $AC_2 = C_1 + C_2$.

2) On note à présent P la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de colonnes C_1, C_2 et C_3 dans cet ordre.

a) Montrer que pour une certaine matrice triangulaire supérieure $T \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à préciser : $AP = PT$. Vous n'avez pas besoin d'avoir réussi les calculs de la question **1)** pour réussir cette question.

b) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

c) Déterminer une expression explicite des puissances de T.

La détermination des puissances de A résulte alors d'un calcul final qui n'est pas demandé.

3) On reprend maintenant l'exercice à zéro indépendamment des questions **1)** et **2)**. On fait l'hypothèse qu'il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ pour lesquelles : $A = PTP^{-1}$.

On pose : $\Pi = (X - t_{11})(X - t_{22})(X - t_{33})$ et on note σ_1, σ_2 et σ_3 les fonctions symétriques élémentaires de Π.

Un simple calcul de A^2 et A^3 montre que : $\mathrm{tr}(A^2) = 6$ et $\mathrm{tr}(A^3) = 10$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{tr}(A^k) = t_{11}^k + t_{22}^k + t_{33}^k$.

b) Montrer que : $\mathrm{tr}(A^3) - \sigma_1 \mathrm{tr}(A^2) + \sigma_2 \mathrm{tr}(A) - 3\sigma_3 = 0$.

c) En déduire t_{11}, t_{22} et t_{33} à permutation près.

---

2 Soit $n \geqslant 2$ fixé. On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et on pose : $M(a, b) = aI_n + bJ$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, ainsi que : $\mathscr{M} = \{M(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $\mathscr{G} = \{M \in \mathscr{M} \mid \exists\, p \in \mathbb{N}^*, \quad M^p = I_n\}$.

1) a) Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Que vaut M^{-1} pour tout $M \in \mathscr{G}$?

2) a) Montrer que l'application $(a, b) \longmapsto M(a, b)$ est injective sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$: $M(a, b) \in \mathrm{U}(\mathscr{M}) \iff a \neq 0$ et $a + nb \neq 0$.

3) a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $M(a, b)^p = M\left(a^p, \dfrac{(a + nb)^p - a^p}{n}\right)$.

b) En déduire que pour tout $M \in \mathscr{G}$: $M^2 = I_n$ et que $\mathscr{G}$ est de cardinal 4.

---

3 Soient $a, b \in \mathbb{C}$ fixés une fois pour toutes. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on dit que P est *solution d'★* si : $P\big(X^2\big) = P(X+a)\,P(X+b)$.
Quand on parle de racines dans ce problème, il s'agit toujours de racines dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\overline{P}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. On **ADMET** que pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$: $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$, $\overline{P \times Q} = \overline{P} \times \overline{Q}$ et $\overline{P \circ Q} = \overline{P} \circ \overline{Q}$.

1) Déterminer les solutions d'★ constantes.

On note à présent $\mathscr{E}$ l'ensemble des solutions d'★ non constantes.

2) Montrer que tout élément de $\mathscr{E}$ est unitaire.

3) On suppose dans cette question que : $a = b$.

a) Soit $P \in \mathscr{E}$. Montrer que 0 est la seule racine de P en comparant le nombre de racines distinctes de $P(X+a)^2$ et le nombre de racines distinctes de $P\big(X^2\big)$.

b) En déduire, en fonction de a, une description explicite de l'ensemble $\mathscr{E}$.

4) Soient $P, Q \in \mathscr{E}$ de mêmes degrés. On pose : $D(X) = P(X) - Q(X)$ et $R(X) = P(X+a)\,D(X+b) + D(X+a)\,Q(X+b)$.

a) Montrer que : $D\big(X^2\big) = R(X)$ et $\deg(R) = \deg(P) + \deg(D)$.

b) En déduire que : $P = Q$.

5) Déduire du résultat de la question **4)** que si a et b sont réels : $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}[X]$.

6) On suppose dans cette question que : $a = 0$ et $b = -1$. Soit $P \in \mathscr{E}$.

a) Montrer que pour toute racine α de P et pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P.

b) En déduire que pour toute racine α de P : $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.

c) En déduire que 0 n'est pas racine de P.

d) Montrer que pour toute racine α de P : $|\alpha + 1| = 1$.

e) Montrer que : $P = \big(X^2 + X + 1\big)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

f) En déduire une description explicite de l'ensemble $\mathscr{E}$.

La fin du problème est consacrée à une description générale de l'ensemble $\mathscr{E}$. On suppose désormais $\mathscr{E}$ non vide.

7) Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par produit.

8) Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $U = A^n - B^n$ et $V = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \Big(A - e^{\frac{2ik\pi}{n}} B\Big)$.

a) Montrer que : $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \Big(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\Big)$.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ non racine de B : $U(z) = V(z)$, puis que : $U = V$.

9) Déduire du résultat de la question **8)** que pour tous $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire et $n \in \mathbb{N}^*$: $P^n \in \mathscr{E} \implies P \in \mathscr{E}$.

10) Justifier l'existence d'un unique polynôme M de degré minimal dans $\mathscr{E}$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les racines distinctes de M et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives, de sorte que : $M = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$.

11) Soit $P \in \mathscr{E}$. On pose : $d = \deg(P) \wedge \deg(M)$ et on note s et t les deux entiers premiers entre eux pour lesquels : $\deg(P) = ds$ et $\deg(M) = dt$.

a) Montrer que : $P^t = M^s$, puis que : $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{p_i}$ pour certains $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{N}^*$.

On pose alors : $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i \wedge p_i}$.

b) Montrer que : $P = Q^s$ et $M = Q^t$, puis que P est une puissance de M.

Les résultats des questions **7)** et **11)** montrent finalement que : $\mathscr{E} = \big\{ M^n \mid n \in \mathbb{N}^* \big\}$.