Devoir surveillé

1

1) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré n avec : $n \geqslant 2$.

a) Calculer le coefficient de degré $n-2$ du polynôme $P(X+1) - P(X) - P'(X)$.

b) Que peut-on dire de n si : $P(X+1) = P(X) + P'(X) + 1$?

2) Résoudre l'équation : $P(X+1) = P(X) + P'(X)$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

3) On pose : $\mathscr{F} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] / \quad P(X+1) = P(X) + P'(X) + 1\right\}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction à préciser.

---

2 On souhaite montrer que la famille des fonctions $x \longmapsto \ln(x+k)$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$, k décrivant $\mathbb{N}$, est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$. On se donne pour cela $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, et on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \ln(x+k) = 0$.

1) Montrer par une étude asymptotique aux bornes les égalités : $\lambda_0 = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$.

2) Montrer, en dérivant, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^p} = 0$.

3) Conclure en convoquant certains polynômes de Lagrange.

---

3 Soit $n \geqslant 2$. On note J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Définition (Matrice magique) On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *magique* si les $2n$ nombres $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}$ et $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}$ sont égaux, i et j parcourant $[\![1, n]\!]$. L'ensemble des matrices magiques de taille n sera noté $\mathscr{M}$.

1) Caractérisation des matrices magiques : Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, A est magique si et seulement si A et J commutent.

2) Propriétés de stabilité :

a) Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Matrices magiques de somme nulle : On note $\mathscr{M}^\circ$ l'ensemble : $\mathscr{M}^\circ = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / \quad AJ = JA = 0\right\}$.

a) Montrer que $\mathscr{M}^\circ$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$.

b) Montrer que $\mathscr{M}^\circ$ et $\mathrm{Vect}(J)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}$.

4) Dimension de l'espace des matrices magiques :

a) Dans cette question seulement : $n = 3$. Déterminer la dimension de $\mathscr{M}^\circ$, puis celle de $\mathscr{M}$.

b) Proposer, sans trop détailler, une base de $\mathscr{M}^\circ$, puis en déduire la dimension de $\mathscr{M}$.

5) Une deuxième méthode de calcul de la dimension : On note P la matrice : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.

a) Montrer que P est inversible.

b) Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle : $JP = PD$.

c) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(D)$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent à D est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

d) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\quad M \in \mathscr{M} \iff P^{-1}MP \in \mathscr{C}(D)$.

e) Retrouver ainsi la dimension de $\mathscr{M}$ calculée à la question **4)b)**.

---

4 On définit une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant : $S_0 = X$, $S_1 = 3X - 4X^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad S_{n+2} = 2\big(1-2X^2\big)S_{n+1} - S_n$.

1) Découverte :

a) Déterminer le degré de S_n et son coefficient dominant pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que X divise S_n. On notera alors Q_n le quotient de la division euclidienne de S_n par X.

2) Lien avec la fonction sinus :

a) Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad S_n(\sin\theta) = \sin\big((2n+1)\theta\big)$.

c) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que S_n est le seul polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel : $\quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\sin\theta) = \sin\big((2n+1)\theta\big)$.

3) Racines : Montrer que S_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa forme scindée.

4) Encore lui !

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \big(1-X^2\big)S_n'' - XS_n' + (2n+1)^2 S_n = 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \lim_{\theta\to 0} \dfrac{S_n(\sin\theta)}{\sin\theta} = 2n+1$. En déduire $S_n'(0)$, $S_n''(0)$, $S_n'''(0)$, $Q_n(0)$, $Q_n'(0)$ et $Q_n''(0)$.

c) En dérivant la forme scindée du polynôme Q_n, montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\sin\dfrac{k\pi}{2n+1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2 - \sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}.$$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}} = -\frac{Q_n''(0)}{2Q_n(0)}$.

e) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad \sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x \quad$ et $\quad x - \sin x \leqslant \dfrac{x^3}{6}$. On admettra qu'en outre : $\quad \sin x \leqslant x$.

f) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{\pi^2}{12}$.

g) En déduire l'existence et la valeur de la limite : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

---

5 **Ne s'aventurent dans cet exercice que celles et ceux d'entre vous qui pensent avoir traité presque parfaitement les quatre exercices précédents.**

On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1) Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que B est unitaire et que B divise A dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'alors B divise A dans $\mathbb{Z}[X]$.

2) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que P prend la valeur 1 sur $\mathbb{Z}$. Montrer que P prend la valeur -1 au plus trois fois sur $\mathbb{Z}$.
