

DEVOIR SURVEILLÉ

1

- 1) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré n avec : $n \geq 2$.
- Calculer le coefficient de degré $n-2$ du polynôme $P(X+1) - P(X) - P'(X)$.
 - Que peut-on dire de n si : $P(X+1) = P(X) + P'(X) + 1$?
- 2) Résoudre l'équation : $P(X+1) = P(X) + P'(X)$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.
- 3) On pose : $\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(X+1) = P(X) + P'(X) + 1\}$. Montrer que \mathcal{F} est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction à préciser.
-

2

On souhaite montrer que la famille des fonctions $x \mapsto \ln(x+k)$ définies sur \mathbb{R}_+^* , k décrivant \mathbb{N} , est libre dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$. On se donne pour cela $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, et on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\sum_{k=0}^n \lambda_k \ln(x+k) = 0$.

- Montrer par une étude asymptotique aux bornes les égalités : $\lambda_0 = 0$ et $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$.
 - Montrer, en dérivant, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{k^p} = 0$.
 - Conclure en convoquant certains polynômes de Lagrange.
-

3

Soit $n \geq 2$. On note J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Définition (Matrice magique) On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *magique* si les $2n$ nombres $\sum_{k=1}^n a_{ik}$ et $\sum_{k=1}^n a_{kj}$ sont égaux, i et j parcourant $\llbracket 1, n \rrbracket$. L'ensemble des matrices magiques de taille n sera noté \mathcal{M} .

- Caractérisation des matrices magiques :** Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est magique si et seulement si A et J commutent.
- Propriétés de stabilité :**
 - Montrer que \mathcal{M} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Montrer que \mathcal{M} est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Matrices magiques de somme nulle :** On note \mathcal{M}° l'ensemble : $\mathcal{M}^\circ = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AJ = JA = 0\}$.
 - Montrer que \mathcal{M}° est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M} .
 - Montrer que \mathcal{M}° et $\text{Vect}(J)$ sont supplémentaires dans \mathcal{M} .
- Dimension de l'espace des matrices magiques :**
 - Dans cette question seulement : $n = 3$. Déterminer la dimension de \mathcal{M}° , puis celle de \mathcal{M} .
 - Proposer, sans trop détailler, une base de \mathcal{M}° , puis en déduire la dimension de \mathcal{M} .
- Une deuxième méthode de calcul de la dimension :** On note P la matrice : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.
 - Montrer que P est inversible.
 - Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle : $JP = PD$.
 - Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(D)$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent à D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

- d) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $M \in \mathcal{M} \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$.
 e) Retrouver ainsi la dimension de \mathcal{M} calculée à la question 4)b).
-

4

On définit une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant : $S_0 = X$, $S_1 = 3X - 4X^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{n+2} = 2(1 - 2X^2)S_{n+1} - S_n$.

1) **Découverte :**

- a) Déterminer le degré de S_n et son coefficient dominant pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 b) Montrer que X divise S_n . On notera alors Q_n le quotient de la division euclidienne de S_n par X .

2) **Lien avec la fonction sinus :**

- a) Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin \theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
 b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$: $S_n(\sin \theta) = \sin((2n + 1)\theta)$.
 c) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que S_n est le seul polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel : $\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\sin \theta) = \sin((2n+1)\theta)$.

3) **Racines :** Montrer que S_n est scindé sur \mathbb{R} et déterminer sa forme scindée.

4) **Encore lui !**

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(1 - X^2)S_n'' - XS_n' + (2n + 1)^2S_n = 0$.
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S_n(\sin \theta)}{\sin \theta} = 2n + 1$. En déduire $S_n'(0), S_n''(0), S_n'''(0), Q_n(0), Q_n'(0)$ et $Q_n''(0)$.
 c) En dérivant la forme scindée du polynôme Q_n , montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \sin \frac{k\pi}{2n+1} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{2x}{x^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$$

- d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = -\frac{Q_n''(0)}{2Q_n(0)}$.
 e) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ et $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$. On admettra qu'en outre : $\sin x \leq x$.
 f) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $0 \leq \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \leq \frac{\pi^2}{12}$.
 g) En déduire l'existence et la valeur de la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
-

5

NE S'AVENTURENT DANS CET EXERCICE QUE CELLES ET CEUX D'ENTRE VOUS QUI PENSENT AVOIR TRAITÉ PRESQUE PARFAITEMENT LES QUATRE EXERCICES PRÉCÉDENTS.

On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{Z} .

- 1) Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que B est unitaire et que B divise A dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'alors B divise A dans $\mathbb{Z}[X]$.
 2) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que P prend la valeur 1 sur \mathbb{Z} . Montrer que P prend la valeur -1 au plus trois fois sur \mathbb{Z} .
-