Devoir surveillé

1 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose : $E_\lambda = \left\{P \in \mathbb{R}[X] / \quad \left(X^2+1\right)P' = \lambda XP\right\}$.

1) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer E_0 et E_1.

3) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $E_\lambda \neq \{0\} \implies \lambda \in \mathbb{N}$.

4) Soient $n \geqslant 2$ et $P \in E_n$. On note Q le quotient de la division euclidienne de P par X^2+1. Montrer que : $Q \in E_{n-2}$.

5) En déduire une description explicite de E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

2 On note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2) a) Montrer qu'il existe exactement deux réels non nuls r, que l'on explicitera, pour lesquels la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E. On les notera α et β avec : $\alpha < \beta$.

b) Vérifier que la suite $(n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi élément de E.

c) Montrer que les trois suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.

3) On note à présent $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle : $a_0 = 1$ et $a_1 = a_2 = 0$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle : $b_1 = 1$ et $b_0 = b_2 = 0$, et enfin $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle : $c_2 = 1$ et $c_0 = c_1 = 0$.

a) Montrer que les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.

b) Montrer que toute suite de E est combinaison linéaire de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer que toute suite de E s'écrit d'une et une seule manière sous la forme $\left((\lambda n+\mu)\alpha^n+\nu\beta^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

3

1) On appelle *fonction cotangente* et on note cotan la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$. Déterminer son ensemble de définition $\mathscr{D}_{\text{cotan}}$, puis étudier cette fonction et tracer l'allure de son graphe. Une réponse détaillée est attendue. Que vaut $\text{cotan}(\pi - x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_{\text{cotan}}$?

2) Soit $n \geqslant 2$.

a) Montrer que : $(X+1)^n-(X-1)^n = \alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + \mathrm{i}\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{n}\right)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}^*$ à préciser. On commencera par déterminer les racines de $(X+1)^n - (X-1)^n$.

b) Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

c) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\text{cotan}^2 x \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2 x$.

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

---

4 Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *commutant de A* l'ensemble $\mathscr{C}(A)$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent à A. On appelle *polynôme en A* toute matrice de la forme $P(A)$ pour un certain $P \in \mathbb{K}[X]$, et l'ensemble de ces matrices est noté $\mathbb{K}[A]$.

On cherche dans ce problème à calculer dans certains cas particuliers la dimension de $\mathscr{C}(A)$ et à comparer les ensembles $\mathscr{C}(A)$ et $\mathbb{K}[A]$.

1) **a)** Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contenant $\mathbb{K}[A]$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2) On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

b) Est-il vrai que : $\mathscr{C}(A) = \mathbb{K}[A]$? On pourra calculer $(A - I_3)^2$.

3) Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_n$ distincts.

a) Montrer que $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En déduire la dimension de $\mathscr{C}(D)$.

b) Montrer que la famille $\left(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1}\right)$ est libre. Est-il vrai que : $\mathscr{C}(D) = \mathbb{K}[D]$?

4) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On fait l'hypothèse que $\mathscr{C}(A)$ est de dimension 3. Pour tous $i, j \in \{1, 2\}$, on note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position (i, j), égal à 1.

a) Montrer, grâce à la formule de Grassmann, que : $\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{21}\right) \neq \{0\}$ et $\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}\left(E_{12}, E_{22}\right) \neq \{0\}$.

b) En déduire que A est diagonale, puis dénicher une contradiction.

5) Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale de la forme : $D = \begin{pmatrix} d_1 I_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_r I_{p_r} \end{pmatrix}$ pour certains $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{K}$ distincts. Attention, on donne ici D **PAR BLOCS** — avec en particulier : $n = p_1 + \ldots + p_r$.

a) Montrer que $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_r \end{pmatrix}$, M_1 décrivant $\mathscr{M}_{p_1}(\mathbb{K})$, …, M_r décrivant $\mathscr{M}_{p_r}(\mathbb{K})$.

b) En déduire la dimension de $\mathscr{C}(D)$.