Devoir surveillé

1 Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(2x)^2}{x\sin(4x)+x^2}$.

2

1) On pose pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$: $\varphi(P) = \big(P(0), P'(0), P(1), P'(1)\big)$.

a) Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $A \in \mathbb{R}_3[X]$ pour lequel : $\varphi(A) = (1,0,0,0)$ et le calculer.

On ADMET qu'il existe de même un et un seul polynôme $B \in \mathbb{R}_3[X]$ pour lequel : $\varphi(B) = (0,1,0,0)$ et que celui-ci vaut : $B = X(X-1)^2$. On pose alors : $C = A(1-X)$ et $D = -B(1-X)$ — ce sont des composées, pas des produits !

b) Calculer $\varphi(C)$ et $\varphi(D)$.

2) **a)** Montrer que la famille (A,B,C,D) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Montrer que l'application φ est bijective de $\mathbb{R}_3[X]$ sur $\mathbb{R}^4$.

3) On pose : $G = \Big\{g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid g(0) = g'(0) = g(1) = g'(1) = 0\Big\}$.

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

---

3 On s'intéresse à l'ensemble des couples de polynômes $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ pour lesquels : $P^2 + \big(1-X^2\big)Q^2 = 1$ ★.

1) Déterminer les couples (P,Q) solutions d'★ pour lesquels le polynôme P est constant.

En vue des questions **2)**, **3)** et **4)**, on se donne un couple (P,Q) solution d'★ pour lequel P n'est pas constant et on pose : $n = \deg(P)$. On suppose de plus que le coefficient dominant α de P et le coefficient dominant β de Q sont positifs.

2) **a)** Montrer que Q divise PP', puis que Q divise P'.

b) Exprimer le degré de Q en fonction de n.

3) **a)** Montrer que : $\alpha = \beta$.

b) En déduire que : $Q = \dfrac{1}{n}\,P'$.

c) Montrer que : $\big(1-X^2\big)P'' - XP' + n^2P = 0$.

4) On note maintenant f la fonction $\theta \longmapsto P(\cos\theta)$ sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer f'', puis montrer que f est de la forme $\theta \longmapsto \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que : $\lambda \in \big\{-1, 1\big\}$ et $\mu = 0$.

Les polynômes de Tchebychev ont été définis et étudiés en TD, mais aucune connaissance à leur sujet n'est ici requise.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\cos(n\theta) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta$.

b) En déduire l'existence d'un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

c) Montrer que le polynôme T_n de la question **b)** est unique.

6) **a)** Montrer que le couple $\left(T_n, \dfrac{1}{n}\,T_n'\right)$ est solution d'★ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Que sont finalement toutes les solutions d'★ ?

---

4 Soit $n \geqslant 2$ fixé. On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *magique* si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}$.
On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) **a)** Montrer que : $\mathscr{M} = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \quad AJ = JA\right\}$.

b) Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) On pose à présent : $\mathscr{M}^\circ = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \quad AJ = JA = 0\right\}$. On **ADMET** que $\mathscr{M}^\circ$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$. Montrer que $\mathscr{M}^\circ$ et $\text{Vect}(J)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}$.

3) **a)** Dans cette question seulement : $n = 3$. Montrer que $\mathscr{M}^\circ$ est de dimension 4, puis calculer la dimension de $\mathscr{M}$.

b) Proposer, sans trop détailler, une base de $\mathscr{M}^\circ$, puis en déduire la dimension de $\mathscr{M}$.

4) On pose enfin : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$, matrice carrée de taille n dont les coefficients non précisés valent 0.

a) Montrer que P est inversible.

b) Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle : $JP = PD$.

c) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(D)$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent à D est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

d) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $M \in \mathscr{M} \iff P^{-1}MP \in \mathscr{C}(D)$.

e) Retrouver ainsi la dimension de $\mathscr{M}$ calculée à la question **3)b)**.