# Devoir surveillé

**1** Les questions **1)** à **5)** suivantes sont indépendantes.

**1)** On pose $E = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \quad P(X+1) - P(X-1) = 2P'(X) - P''(X)\right\}$. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer un supplémentaire.

**2)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $f_k$ la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^k+1}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la famille $(f_0,\dots,f_n)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.

**3)** Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

**4)** Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que $f$ possède une limite en $+\infty$ strictement supérieure à $f(0)$. Montrer que $f$ possède un minimum sur $\mathbb{R}_+$.

**5)** **(Plus difficile)**

**a)** Soient $I$ un intervalle non vide et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. Montrer que $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ ne peut pas être de cardinal 0 ou 2 pour tout $y \in \mathbb{R}$.

**b)** Trouver un exemple de fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour laquelle $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ est fini de cardinal pair pour tout $y \in \mathbb{R}$.

---

**2** Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts et $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $\deg(P) \geqslant \deg(Q) \geqslant 1$ et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$\big(P(z) = a \iff Q(z) = a\big) \qquad \text{et} \qquad \big(P(z) = b \iff Q(z) = b\big)$$

et on note $R$ le polynôme $(P-a)(P-b)$.

**1)** Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $R$ de multiplicité $k \geqslant 1$. Montrer que $z$ est de multiplicité $k-1$ dans $P'$, puis de multiplicité au moins $k$ dans $(P-Q)P'$.

**2)** En déduire que $R$ divise $(P-Q)P'$, puis que $P = Q$.

---

**3** Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *commutant de $A$* l'ensemble $\mathscr{C}(A)$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent à $A$. On appelle *polynôme en $A$* toute matrice de la forme $P(A)$ pour un certain $P \in \mathbb{K}[X]$, et l'ensemble de ces matrices est noté $\mathbb{K}[A]$.

On cherche à calculer la dimension de $\mathscr{C}(A)$ dans quelques cas particuliers et à comparer les ensembles $\mathscr{C}(A)$ et $\mathbb{K}[A]$.

**1)** **a)** Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

**b)** Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contenant $\mathbb{K}[A]$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

**2)** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**a)** Déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

**b)** Montrer que $A$ possède un polynôme annulateur de degré 2. Est-il vrai que $\mathscr{C}(A) = \mathbb{K}[A]$ ?

**3)** Soient $d_1,\dots,d_n \in \mathbb{K}$ distincts. On note $D$ la matrice diagonale $\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$.

**a)** Montrer que $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En déduire la dimension de $\mathscr{C}(D)$.

**b)** Montrer que la famille $\big(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1}\big)$ est libre. Est-il vrai que $\mathscr{C}(D) = \mathbb{K}[D]$ ?

**4)** Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On fait l'hypothèse que $\mathscr{C}(A)$ est de dimension 3. Pour tous $i, j \in \{1,2\}$, on note $E_{ij}$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position $(i,j)$, égal à 1.

**a)** Montrer que $\mathscr{C}(A) \cap \operatorname{Vect}\big(E_{11}, E_{21}\big) \neq \{0\}$ par un argument de dimension, puis que $c = 0$.

On **admet** que $\mathscr{C}(A) \cap \operatorname{Vect}\big(E_{12}, E_{22}\big) \neq \{0\}$ — la preuve est la même.

**b)** Montrer que $A$ est diagonale, puis dénicher une contradiction.

**5)** Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale **PAR BLOCS** de la forme $D = \begin{pmatrix} d_1 I_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_r I_{p_r} \end{pmatrix}$ pour certains $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{K}$ distincts. En particulier $n = p_1 + \ldots + p_r$.

**a)** Montrer que $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_r \end{pmatrix}$, $M_1$ décrivant $\mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{K})$, …, $M_r$ décrivant $\mathcal{M}_{p_r}(\mathbb{K})$.

**b)** En déduire la dimension de $\mathscr{C}(D)$.

**6)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotence d'indice $n$, i.e. pour laquelle $A^n = 0$ mais $A^{n-1} \neq 0$.

**a)** Justifier l'existence d'un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ pour lequel $A^{n-1}X \neq 0$.

**b)** Montrer que la famille $\left(X, AX, A^2X, \ldots, A^{n-1}X\right)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Soit $M \in \mathscr{C}(A)$. D'après **b)** : $MX = a_0 X + a_1 AX + \ldots + a_{n-1} A^{n-1} X$ pour certains $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

**c)** Montrer que $M = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_{n-1} A^{n-1}$. Conclusion ?

---

**4** Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dira que $f$ est *solution* d'★ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ : $f(x+y) + f(x-y) = 2\big(f(x) + f(y)\big)$.

**1)** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution d'★.

**a)** Montrer que $f$ est paire.

**b)** Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ : $f(nx) = n^2 f(x)$.

**c)** Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$ : $f(rx) = r^2 f(x)$.

**d)** Montrer que si $f$ est bornée au voisinage de 0, elle l'est sur tout intervalle $]-A, A[$, $A$ décrivant $\mathbb{R}_+^*$.

**2)** Déterminer toutes les solutions d'★ continues sur $\mathbb{R}$.

**3)** Soient $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $p, q > 1$. On suppose que $\varphi$ est bornée au voisinage de 0 et que $\varphi(px) = q\,\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**a)** Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ : $\varphi(x) = \dfrac{\varphi\big(p^n x\big)}{q^n}$.

**b)** En déduire que $\varphi$ est continue en 0 en revenant à la définition de la limite.

**4)** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution d'★ bornée au voisinage de 0.

**a)** Montrer que $f$ est continue en 0.

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On note $g$ la fonction $x \longmapsto f(a+x) - f(a) - f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**b)** Montrer que $g(2x) = 2\,g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**c)** Montrer que $g$ est bornée au voisinage de 0.

**d)** En déduire que $f$ est continue en $a$. Conclusion ?

---