Devoir surveillé

1 Chou le chaton, en plus de son régime de tartines et de céréales, s'offre à l'occasion une souris qui passe.

— S'il en mange une un jour, il a son compte et fait la diète le lendemain.

— Si au contraire il n'en mange pas un jour, il part en chasse le lendemain et en attrape une avec probabilité $\dfrac{1}{2}$.

On étudie la consommation de souris de Chou sur une période de n jours numérotés de 1 à n. La veille du jour 1, Chou n'a pas mangé de souris, il a donc l'instinct chasseur le jour 1.

1) Avec quelle probabilité Chou n'a-t-il croqué aucune souris pendant l'étude ?

2) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, avec quelle probabilité p_k Chou a-t-il mangé une souris le $k^{\text{ème}}$ jour de l'étude ? Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter cette limite.

3) **a)** Calculer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la probabilité de l'événement « Chou a croqué exactement une souris pendant l'étude et c'était le $k^{\text{ème}}$ jour ». On distinguera les cas : $k < n$ et $k = n$.

b) En déduire la probabilité que Chou ait croqué exactement une souris pendant l'étude.

4) Soit $k \in [\![0, n]\!]$ fixé.

a) Montrer qu'il existe $\dbinom{n-k}{k}$ mots de n lettres sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui contiennent k fois le chiffre « 1 » mais jamais deux « 1 » consécutifs et qui ne finissent pas par « 1 ».

b) Lorsque : $k \geqslant 1$, compter de même le nombre de mots de n lettres sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui contiennent k fois le chiffre « 1 » mais jamais deux « 1 » consécutifs et qui finissent par « 1 ».

c) En déduire la probabilité de l'événement « Chou a mangé exactement k souris pendant l'étude ».

---

2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$. On **admet** que pour tout $t \in \,]-1, +\infty[$: $\ln(1+t) \leqslant t$.

1) Calcul de certaines valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) Calculer u_0, u_1 et u_2.

b) Montrer l'égalité : $u_3 = \dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

2) Développement asymptotique à deux termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

b) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3) Calcul d'une intégrale intermédiaire :

a) Justifier la bonne définition de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer les dérivées successives de la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ sur $]-1, +\infty[$.

c) Montrer que pour tous $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\ln(1+t) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, t^k\right| \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.

d) En déduire la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = I$.

e) On rappelle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire l'égalité : $I = \dfrac{\pi^2}{12}$.

4) **Troisième terme du développement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n = n\displaystyle\int_0^1 \ln\big(1+t^n\big)\,\mathrm{d}t.$

a) Montrer que pour tous $t \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad t^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{\ln t}{n}.$

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0,1]$: $\quad \left|\displaystyle\int_{\varepsilon^n}^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\varepsilon^n}^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon^n \ln\varepsilon + \dfrac{1-\varepsilon^n}{n}.$

c) Justifier proprement la limite : $\quad a_n = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} n\int_\varepsilon^1 \ln\big(1+t^n\big)\,\mathrm{d}t \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad |a_n - I| \leqslant \dfrac{M}{n}.$

e) En déduire un équivalent simple de $u_n - 1 + \dfrac{\ln 2}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $\quad a \leqslant b \quad$ et $f, g \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

2) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On pose pour tout $x > 0$: $\quad F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

a) Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0, puis exprimer F' en fonction de f et F.

b) Montrer que pour tout $x > 0$: $\quad \displaystyle\int_0^x F(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x F(t)f(t)\,\mathrm{d}t - xF(x)^2.$

c) En déduire l'*inégalité de Hardy*, à savoir que pour tout $x > 0$: $\quad \displaystyle\int_0^x F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t.$

3) On pose pour tout $x \geqslant 0$: $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si : } x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si : } x \geqslant 1 \end{cases} \quad$ et $\quad F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

a) Calculer : $\quad \displaystyle\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t \quad$ pour tout $x \geqslant 1$.

b) Calculer : $\quad \displaystyle\int_0^x F(t)^2\,\mathrm{d}t \quad$ pour tout $x \geqslant 1$.

c) En déduire que la constante 4 de l'inégalité de Hardy est optimale.

---

4 Soient $f \in \mathscr{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et $g, h \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que : $\quad f(0) = 0 \quad$ et que g est positive ou nulle.

1) Majorer pour tout $x \in [0,1]$, grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, la quantité : $\quad \big|f(x) - f'(0)x\big|$.

2) Montrer que pour n assez grand, l'ensemble $\left\{\dfrac{1}{n}\,g\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ est inclus dans $[0,1]$.

3) En étudiant la quantité : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{1}{n}\,g\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{f'(0)}{n}\,g\left(\frac{k}{n}\right)\right] h\left(\frac{k}{n}\right), \quad$ montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n}\,g\left(\frac{k}{n}\right)\right) h\left(\frac{k}{n}\right) = f'(0)\int_0^1 g(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

4) En déduire un équivalent simple des sommes suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k}\,\sin\frac{k\pi}{n^2}.$ $\qquad$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{k}.$
