DEVOIR SURVEILLÉ

1 On note f la fonction $x \longmapsto \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle : $u_0 \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Étudier le signe de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ et déterminer les points fixes de f. On notera α et β ces points fixes avec : $\alpha < \beta$. Préciser leur position par rapport à 0 et $\frac{1}{2}$.

On ADMET pour gagner du temps que les intervalles $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $[0,\beta[$ et $]\beta,+\infty[$ sont stables par f et que les points fixes de $f\circ f$ sont exactement α et β.

2) Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle dans chacun des cas suivants :

a) $u_0 > \beta$. **b)** $u_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. **c)** $u_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

3) On suppose dans cette question que : $u_0 \in]1,\beta[$.

a) Montrer par l'absurde que pour un certain $N \in \mathbb{N}$: $u_N \in [0,1]$.

b) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

---

2 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$. On ADMET pour gagner du temps que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de limite $+\infty$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$.

a) Montrer que pour tous $n,p \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.

b) En déduire que pour tous $n,k \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.

c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note α sa limite.

2) a) Montrer, en exploitant le résultat de la question **1)b)**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant e^{2^n\alpha} \leqslant u_n + 1$.

b) En déduire que : $\alpha > 0$ et déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^{2^n\alpha}}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\delta_n = e^{2^n\alpha} - u_n$.

a) Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\delta_n = \frac{1}{2} + \frac{\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n}{2}\, e^{-2^n\alpha}$.

b) En déduire que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

c) Montrer enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \left\lfloor e^{2^n\alpha} \right\rfloor$.
