Devoir surveillé

1 Soient E un ensemble et f, g et h trois applications de E dans E. On suppose que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives sur E et que $h \circ f \circ g$ est surjective de E sur E. Montrer qu'alors f, g et h sont toutes les trois bijectives de E sur E.

---

2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1) Étudier en fonction de u_0 la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite éventuelle.

On suppose désormais que : $u_0 \in]0,1[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = nu_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

2) a) Montrer par récurrence grâce aux variations de la fonction $x \longmapsto x(1-x)$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite ℓ appartient à $[0,1]$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \dfrac{u_1}{n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{u_1}{2}$.

c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n \geqslant u_n\big(1-\ell-u_n\big)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} \geqslant (1-\ell)S_n + u_{n+1}$.

c) En déduire enfin la valeur de ℓ.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On a vu en TD que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{\ln n} = 1$, et donc aussi que : $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leqslant H_n$.

b) Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant p$: $S_n - S_p \geqslant v_p(H_n - H_p)$.

c) En déduire que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant p$: $1 \geqslant \dfrac{S_n}{H_n} \geqslant v_p + \dfrac{S_p - v_pH_p}{H_n}$.

d) Montrer enfin l'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln n} = 1$.

---

3 Pour tous ensembles non vides E et F et pour toute application $f : E \longrightarrow F$, on dit que f est :

— *presque surjective* (*de E sur F*) si tout élément de F — sauf peut-être un — possède un antécédent par f dans E.

— *doublement surjective* (*de E sur F*) si tout élément de F possède au moins deux antécédents par f dans E.

— *presque doublement surjective* (*de E sur F*) si tout élément de F — sauf peut-être un — possède au moins deux antécédents par f dans E.

1) Écrire avec des quantificateurs la proposition « f est doublement surjective de E sur F ».

2) a) Montrer que toute fonction continue presque surjective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ est surjective.

b) Proposer un exemple de fonction continue presque surjective de $\mathbb{R}$ sur $[0,1]$ qui **N'est PAS** surjective. Une expression explicite est attendue.

3) a) La fonction $z \longmapsto e^z$ est-elle surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$? Presque surjective ? Doublement surjective ? Presque doublement surjective ?

b) Même question avec la fonction $z \longmapsto az^2 + bz + c$ pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$.

4) Montrer que la composée de deux applications presque doublement surjectives est presque doublement surjective.

5) Montrer que la composée de deux applications presque surjectives n'est pas forcément presque surjective.

---

4 On définit par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application $(t_0, \dots, t_n) \longmapsto F_n(t_0, \dots, t_n)$ de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n+1}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ en posant pour tout $t_0 > 0$: $F_0(t_0) = t_0$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t_0, \dots, t_{n+1} > 0$: $F_{n+1}(t_0, \dots, t_{n+1}) = t_0 + \dfrac{1}{F_n(t_1, \dots, t_{n+1})}$.

On **ADMET** qu'une telle définition est bien possible et que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t_0, \dots, t_n > 0$: $F_n(t_0, \dots, t_n) > 0$. Les applications ainsi construites sont appelées des *fractions continues*.

Par exemple : $F_3(1,2,3,4) = 1 + \dfrac{1}{F_2(2,3,4)} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{F_1(3,4)}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{F_0(4)}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4}}}$.

1) **Un exemple :** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = F_n(2, \dots, 2)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite. On pourra s'intéresser aux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

2) **Une nouvelle définition récursive :** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $t_0, \dots, t_{n+1} > 0$:
$$F_{n+1}(t_0, \dots, t_{n+1}) = F_n\left(t_0, \dots, t_{n-1}, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right).$$

3) **Un résultat universel de convergence :** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $\begin{cases} p_0 = a_0, \quad p_1 = 1 + a_0 a_1 & \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad p_{n+2} = p_{n+1} a_{n+2} + p_n \\ q_0 = 1, \quad q_1 = a_1 & \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad q_{n+2} = q_{n+1} a_{n+2} + q_n. \end{cases}$

On **ADMET** pour gagner du temps que p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Étudier la monotonie stricte de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.

c) En déduire que les suites $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\ell - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n^2}$. On pourra remarquer que ℓ est compris entre $\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

e) En déduire que ℓ est irrationnel.

f) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$: $F_{n+2}(a_0, \dots, a_{n+1}, t) = \dfrac{p_{n+1} t + p_n}{q_{n+1} t + q_n}$.

g) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_n(a_0, \dots, a_n) = \dfrac{p_n}{q_n}$.

Conclusion : la suite de rationnels $\big(F_n(a_0, \dots, a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel, et ceci quelle que soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels non nuls choisie au départ.

4) **Développement d'un irrationnel en fraction continue :** Soit x un irrationnel supérieur à 1.

a) Justifier la bonne définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$.

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \lfloor x_n \rfloor$.

b) Montrer que a_n est un entier naturel non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut dès lors associer à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme à la question **3)**.

c) Montrer, en exploitant notamment le résultat de la question **3)f)**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x = \dfrac{p_{n+1} x_{n+2} + p_n}{q_{n+1} x_{n+2} + q_n}$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|x - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \dfrac{1}{q_{n+1}^2}$, puis que : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(a_0, \dots, a_n) = x$.

Conclusion : $x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3 + \dots}}}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée le *développement de x en fraction continue*.

Les fractions continues interviennent en divers endroits des mathématiques, par exemple en arithmétique et en théorie des nombres. À titre de curiosité, le mathématicien soviétique Khintchine et le mathématicien français Paul Lévy ont montré en 1936 que quand on se donne au hasard un irrationnel x, la suite $\left(\sqrt[n]{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la question **4)** converge vers $e^{\frac{\pi^2}{12\ln 2}}$ avec probabilité 1 — i.e. non pas a priori pour tout irrationnel x, mais **POUR PRESQUE TOUT** irrationnel x, en un sens à préciser...