Devoir surveillé

1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Montrer que la fonction $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur son image — que l'on précisera — et déterminer sa réciproque.

2) Soient E un ensemble et f, g et h trois applications de E dans E. On suppose que $f \circ g \circ h$ est injective sur E et que $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ sont surjectives de E sur E. Montrer qu'alors f, g et h sont toutes les trois bijectives de E sur E.

3) L'application $X \overset{\chi}{\longmapsto} \big(X \cap [0,1]\ ,\ X \cap [1,2]\big)$ de $\mathscr{P}\big([0,2]\big)$ dans $\mathscr{P}\big([0,1]\big) \times \mathscr{P}\big([1,2]\big)$ est-elle :

a) injective ? **b)** surjective ?

2

1) Soient E un ensemble $f : E \longrightarrow E$ une application et A une partie de E. On pose : $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$, avec par convention : $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

a) Montrer que B est stable par f.

b) Montrer que B est la plus petite partie de E — pour l'inclusion — à la fois stable par f et contenant A.

2) **a)** Calculer B dans le cas où : $E = \mathbb{R}$, f est la fonction $x \longmapsto x^2$ et : $A = [1,2]$.

b) Calculer B dans le cas où : $E = \mathbb{R}_+$, f est la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+6}$ et : $A = [4, +\infty[$.

---

3 On note f la fonction $x \longmapsto 2 - \dfrac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

1) **a)** Déterminer les deux points fixes α et β de f avec : $\alpha < \beta$, puis étudier le signe de $x \longmapsto f(x) - x$.

b) Montrer que l'intervalle $]-\infty, \alpha[$ est stable par f.

2) **a)** Montrer que l'intervalle $[0, \beta[$ est stable par $f \circ f$.

b) Montrer, en factorisant la fonction polynomiale $x \longmapsto f \circ f(x) - x$, que $f \circ f$ possède exactement quatre points fixes — que l'on explicitera.

c) Montrer que pour tout $x \in [0, \beta[$: $f \circ f(x) \leqslant x$.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'unique suite pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3) On suppose que : $u_0 < \alpha$. Étudier la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4) On suppose que : $u_0 \in [0, \beta[$.

a) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

5) On ne fait pas d'hypothèse sur u_0 dans cette question, mais on suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ sans jamais prendre la valeur ℓ.

a) Étudier la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell}$.

b) En déduire que la suite $\big(|u_n - \ell|\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang, puis dénicher une contradiction.

6) Montrer finalement que, selon u_0, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est soit divergente, soit stationnaire.

---

4 On appelle *suite de Cantor* toute suite d'entiers $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour laquelle : $a_1 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $k \geqslant 2$: $a_k \in [\![0, k-1]\!]$.

1) Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cantor. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$.

a) Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p > n$: $0 \leqslant S_p - S_n \leqslant \frac{1}{n!} - \frac{1}{p!}$.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Sa limite, qui dépend de la suite de Cantor a, sera notée σ_a.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leqslant \sigma_a \leqslant S_n + \frac{1}{n!}$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier N_n pour lequel : $N_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} \leqslant n!\sigma_a \leqslant N_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$.

2) Soit $\ell \in [-1, 1]$. On pose : $\theta = \operatorname{Arccos} \ell$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $a_k = \left\lfloor \frac{k\theta}{2\pi} \right\rfloor$.

a) Montrer que la suite $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cantor.

On pose : $x = 2\pi\sigma_a$.

b) Étudier la limite : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$. En déduire l'égalité : $\lim_{n\to+\infty} \cos(n!x) = \ell$.

Il vient d'être montré que tout réel de $[-1, 1]$ est la limite d'une suite de la forme $\big(\cos(n!x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$. En sens inverse, est-il vrai que la suite $\big(\cos(n!x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$? C'est à cette question qu'on va maintenant chercher à répondre.

3) On pose pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$: $f_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

a) Exprimer pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale : $\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $f_{n+1}(x)$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\big|f_0(x)\big| \leqslant x\mathrm{e}^x$. On pourra commencer par écrire $f_0(x)$ comme une intégrale.

c) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$: $\big|f_n(x)\big| \leqslant \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$.

d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

4) On note à présent $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $a_1 = 2$ et pour tout $k \geqslant 2$: $a_k = 1$. La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est clairement une suite de Cantor. On reprend les notations de la question **1)**.

a) Que vaut σ_a ? Montrer l'égalité : $\lim_{n\to+\infty} \cos(n!2\pi\mathrm{e}) = 1$.

b) Montrer que l'entier N_n a la même parité que $n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire que la suite $\big(\cos(n!\pi\mathrm{e})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

---

5 **(Très difficile)** Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir **TRÈS BIEN RÉUSSI** tout le reste !

Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ injective : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^2} = +\infty$.
