DEVOIR SURVEILLÉ – PARTIE 1 (1H30)

1 Les questions **1)** et **2)** suivantes sont indépendantes.

1) Soit $(x,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On suppose que $x^2 = 7^n + 200$.

a) Montrer que n est pair en raisonnant modulo 4. Ainsi $n = 2m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que l'un des entiers $x + 7^m$ ou $x - 7^m$ est divisible par 25.

c) Achever de résoudre l'équation $x^2 = 7^n + 200$ d'inconnue $(x,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si ça peut vous rassurer, cette équation possède exactement une solution.

2) Soient E un ensemble et $f_1, \ldots, f_n$ des applications de E dans E. On suppose que $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$ est injective sur E et $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$ surjective de E sur E. Montrer que $f_1, \ldots, f_n$ sont bijectives de E sur E. On pourra raisonner par récurrence.

---

2 On note f la fonction $x \longmapsto 2 - \dfrac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}$ et on pose $\alpha = -\sqrt{5} - 1$ et $\beta = \sqrt{5} - 1$. On **ADMET** pour gagner du temps que :

— pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) - x = -\dfrac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta) \quad$ et $\quad f \circ f(x) - x = -\dfrac{1}{8}(x-\alpha)x(x-\beta)(x-2)$,

— l'intervalle $]-\infty, \alpha[$ est stable par f et $[0, \beta[$ l'est par $f \circ f$.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite pour laquelle $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On suppose que $u_0 < \alpha$. Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) On suppose que $u_0 \in [0, \beta[$.

a) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3) On ne fait pas d'hypothèse sur u_0 dans cette question, mais on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ sans jamais prendre la valeur ℓ.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = -\ell$.

b) En déduire que la suite $\big(|u_n - \ell|\big)_{n\in\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang, puis dénicher une contradiction.

4) Montrer finalement que, selon u_0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit divergente, soit stationnaire.

---

3 **(Très difficile)** Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ injective : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^2} = +\infty$.

Devoir surveillé – Partie 2 (2h30)

4 Les questions **1)**, **2)** et **3)** suivantes sont indépendantes.

1) Montrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.

2) Montrer, en raisonnant modulo 5, que l'équation $x^4 = 3y^2 - 25$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ n'a pas de solution.

3) Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On note f l'application $X \longmapsto (X \cap A) \cup B$ de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même.

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective. (ii) f est surjective. (iii) $A = E$ et $B = \varnothing$.

b) Montrer que $f^{-1}\big(\{B\}\big) = \mathscr{P}\big(\overline{A} \cup B\big)$.

---

5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite pour laquelle $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = nu_n$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) a) Montrer par récurrence, grâce aux variations de la fonction $x \longmapsto x - x^2$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite ℓ appartient à $[0,1]$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \dfrac{u_1}{n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{u_1}{2}$.

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n \geqslant u_n\big(1 - \ell - u_n\big)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} \geqslant (1-\ell)S_n + u_{n+1}$.

c) En déduire que $\ell = 1$.

4) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln n \leqslant H_n \leqslant \ln n + 1$.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leqslant H_n$.

b) Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant p$: $S_n \geqslant S_p + (H_n - H_p)\,v_p$.

c) En déduire, en revenant à la définition de la limite, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$.

---

6 Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On rappelle que pour toute fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note f^k la fonction $\overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{k \text{ termes}}$.

1) On suppose p pair. Trouver un exemple simple de fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour laquelle $f^2(n) = n + p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction. On suppose p non nul et que $f^2(n) = n + p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que f est injective et sans point fixe.

b) Déterminer une expression explicite de f^{2k} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$: $f^k(n) \geqslant p$.

c) Soit $n \in [\![0, p-1]\!]$. La division euclidienne de $f(n)$ par p s'écrit $f(n) = pq + r$ pour certains $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, p-1]\!]$. Montrer que $f(n) = r$ ou $f(r) = n$.

d) On définit sur $[\![0, p-1]\!]$ une relation $\sim$ de la manière suivante — pour tous $a, b \in [\![0, p-1]\!]$:

$$a \sim b \iff a = b \quad \text{ou} \quad b = f(a) \quad \text{ou} \quad a = f(b).$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $[\![0, p-1]\!]$.

e) Montrer d'abord que toute classe d'équivalence de $[\![0, p-1]\!]$ pour $\sim$ contient au moins deux éléments, puis qu'elle en contient exactement deux.

f) En déduire que p est pair.
