Devoir surveillé

1 Les questions **1)** à **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Soient E un ensemble et f, g et h trois applications de E dans E. On suppose $f \circ g \circ h$ bijective de E sur E et $h \circ g^2$ surjective de E sur E. Montrer que les applications f, g et h sont toutes les trois bijectives de E sur E.

2) On note φ l'application $(x,y) \longmapsto \left(x+y, x^2+y^2\right)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

a) Représenter graphiquement $\varphi^{-1}\Big(\mathbb{R}_+ \times [0,1]\Big)$.

b) Déterminer l'image de φ.

3) On note ψ l'application $X \longmapsto \Big(X \cap [0,2]\ ,\ X \cap [1,3]\Big)$ de $\mathscr{P}\big([0,3]\big)$ dans $\mathscr{P}\big([0,2]\big) \times \mathscr{P}\big([1,3]\big)$.

a) ψ est-elle injective ? **b)** ψ est-elle surjective ?

4) Montrer que l'équation $x^3 = 3^n + 1$ d'inconnue $(n,x) \in \mathbb{N}^2$ n'a pas de solution. N'hésitez pas à présenter vos raisonnements s'ils vous paraissent intéressants même s'ils n'aboutissent pas.

---

2 On pose $\mathscr{E} = \Big\{ n \in \mathbb{N}^* \ \big|\ \ \exists\, a,b \in \mathbb{N}, \quad n = a^2 + b^2 \Big\}$.

1) a) Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par produit en faisant un tour du côté des nombres complexes.

b) Montrer que pour tout $p \in \mathscr{E}$ impair : $\quad p \equiv 1\ [4]$.

2) Soient $n,a,b \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n divise a^2+b^2, que $a \wedge b = 1$ et que n n'est pas un carré parfait. On rappelle que pour tous $r,s \in \mathbb{R}$ pas nécessairement entiers : $\quad [\![r,s]\!] = \Big\{ k \in \mathbb{Z} \ \big|\ \ r \leqslant k \leqslant s \Big\}$.

a) Comparer le cardinal de $[\![0, \sqrt{n}]\!]^2$ et celui de $[\![0, n-1]\!]$. Quelle propriété de l'application qui associe à tout couple $(x,y) \in [\![0, \sqrt{n}]\!]^2$ le reste de la division euclidienne de $ax+by$ par n en déduit-on ?

b) En déduire l'existence d'un couple $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ pour lequel : $\quad (u,v) \neq (0,0), \quad |u| < \sqrt{n}, \quad |v| < \sqrt{n}\quad$ et n divise $au+bv$.

c) Montrer que n divise $a^2u^2 - b^2v^2$, puis que n divise u^2+v^2.

d) En déduire que $n \in \mathscr{E}$.

3) Soit $p \in \mathbb{P}$ impair. Pour tous $x,y \in [\![1, p-1]\!]$, on dit que $x \sim y$ si $x = y$ ou $xy \equiv 1\ [p]$.

a) Montrer que pour tout $x \in [\![1, p-1]\!]$, il existe un et un seul entier $y \in [\![1, p-1]\!]$ pour lequel $xy \equiv 1\ [p]$. Attention, on veut un entier y dans $[\![1, p-1]\!]$.

b) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $[\![1, p-1]\!]$.

c) Soit $x \in [\![1, p-1]\!]$. À quelle condition nécessaire et suffisante la classe d'équivalence de x est-elle un singleton ? Quel est son cardinal dans le cas contraire ?

d) En déduire le *théorème de Wilson* : $\quad (p-1)! \equiv -1\ [p]$.

e) On pose $m = \dfrac{p-1}{2}$. Montrer, grâce au produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} k(p-k)$, que : $\quad m!^2 \equiv (-1)^{m+1}\ [p]$.

f) En déduire que si $p \equiv 1\ [4]$, alors $p \in \mathscr{E}$.

4) Montrer finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n est la somme de deux carrés parfaits si et seulement si $v_p(n)$ est pair pour tout $p \in \mathbb{P}$ congru à 3 modulo 4.

Le résultat de la question **4)** est appelé le *théorème des deux carrés*. Énoncé pour la première fois sans preuve au $17^{\text{ème}}$ siècle, ce théorème qui a marqué les mathématiques a été démontré un siècle plus tard par le Suisse Leonhard Euler (1707-1783). D'après les questions **1)b)** et **3)f)**, en particulier, un nombre premier impair est la somme de deux carrés parfaits si et seulement s'il est congru à 1 modulo 4.

3

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ deux entiers pour lesquels $n \leqslant n'$ et $n!\pi x \equiv n'!\pi x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Montrer que n' vaut n ou $n+1$.

b) En déduire qu'on peut poser $u_n(x) = \tan\big(n!\pi x\big)$ à partir d'un certain rang $N(x)$.

On note à présent E l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $\big(u_n(x)\big)_{n \geqslant N(x)}$ converge et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) Montrer que la suite $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et préciser sa limite.

3) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$: $\quad f(x+r) = f(x)$.

4) Soit $y \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe un et un seul réel $t \in [0,1[$ pour lequel $\tan(\pi t) = y$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kt \rfloor}{k!}$.

b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant n+2$: $\quad \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n!\,k(k-1)}$.

c) Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note x sa limite.

d) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geqslant n+3$: $\sum_{k=n+3}^{p} \frac{\lfloor kt \rfloor}{k!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$.

e) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n!\,(x - s_n) = t$. On commencera par encadrer $n!\,(s_p - s_n)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geqslant n+3$.

f) En déduire que $f(x) = y$.

g) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$. Montrer l'existence d'un réel $x' \in\,]a,b[$ pour lequel $f(x') = y$.

5) Quelle propriété peu ordinaire de la fonction f a-t-on finalement démontrée ?