Devoir surveillé

1 Les questions **1)**, **2)**, **3)** et **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Soient E un ensemble et f, g et h trois applications de E dans E. On suppose $f \circ g \circ h$ bijective de E sur E et $h \circ g^2$ surjective de E sur E, où : $g^2 = g \circ g$. Montrer que les applications f, g et h sont bijectives de E sur E.

2) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x}$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image — à préciser — et déterminer sa réciproque.

3) Soit $(x,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On suppose que : $x^2 = 7^n + 200$.

a) Montrer que n est pair en raisonnant modulo 4. On peut donc écrire : $n = 2m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que l'un des entiers $x + 7^m$ ou $x - 7^m$ est divisible par 25.

c) Achever de résoudre l'équation : $x^2 = 7^n + 200$ d'inconnue $(x,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. — Si ça peut vous rassurer, cette équation possède exactement une solution.

4) **a)** Montrer que x^5 est congru à 0, 1 ou -1 modulo 11 pour tout $x \in \mathbb{Z}$ en exploitant le petit théorème de Fermat.

b) Résoudre l'équation : $y^2 = x^5 + 7$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ en raisonnant modulo 11.

---

2 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels fixée pour laquelle : $a_1 \geqslant 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+1} \geqslant a_n^2 - a_n + 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $x_n = a_1 \ldots a_n$ et on note y_n l'unique entier pour lequel : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{y_n}{x_n}$.

1) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n \geqslant n+1$.

b) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes.

On peut ainsi poser pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{y_n}{x_n}$ et $v_n = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$.

2) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - u_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} + \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

c) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

3) On fait l'hypothèse dans cette question que ℓ est rationnel, i.e. que : $\ell = \dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que la suite $(px_n - qy_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle est stationnaire. On pourra exploiter ici les propriétés des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire, puis qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel pour tout $n \geqslant N$: $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$.

4) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^{2^k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2^k}}$ est un irrationnel.

3

1) Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On suppose que a et b sont premiers entre eux et que le produit ab est un cube parfait. Montrer que a et b sont eux-mêmes des cubes parfaits.

On s'intéresse désormais à l'équation de Mordell : $y^2 = x^3 + 16$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. On suppose que : $y^2 = x^3 + 16$ et que y est impair.

a) Montrer que pour certains $a, b \in \mathbb{N}^*$ impairs : $y + 4 = a^3$ et $y - 4 = b^3$.

b) Dénicher une contradiction.

3) Trouver une solution évidente de l'équation : $y^2 = x^3 + 16$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ pour laquelle y est pair.

4) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. On suppose que : $y^2 = x^3 + 16$ et que y est pair.

a) Montrer que x et y sont divisibles par 4.

On note alors x' et y' les deux entiers pour lesquels : $x = 4x'$ et $y = 4y'$.

b) Montrer que y' est impair.

On note alors n l'entier pour lequel : $y' = 2n + 1$.

c) Déterminer x et y en exploitant le résultat de la question **1)**.

4

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Pour toute fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note f^k la fonction $\overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{k \text{ fois}}$.

1) On suppose p pair. Trouver un exemple simple de fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^2(n) = n + p$.

2) Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction. On suppose p non nul et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^2(n) = n + p$.

a) Montrer que f est injective et sans point fixe.

b) Déterminer une expression explicite de f^{2k} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$: $f^k(n) \geqslant p$.

c) Soit $n \in [\![0, p-1]\!]$. La division euclidienne de $f(n)$ par p s'écrit : $f(n) = pq + r$ pour certains $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, p-1]\!]$. Montrer : $f(n) = r$ ou $f(r) = n$.

d) On définit sur $[\![0, p-1]\!]$ une relation $\sim$ de la manière suivante — pour tous $a, b \in [\![0, p-1]\!]$:

$$a \sim b \iff a = b \quad \text{ou} \quad b = f(a) \quad \text{ou} \quad a = f(b).$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $[\![0, p-1]\!]$.

e) Montrer que toute classe d'équivalence de $[\![0, p-1]\!]$ pour la relation $\sim$ contient au moins deux éléments.

f) Montrer que toute classe d'équivalence de $[\![0, p-1]\!]$ pour la relation $\sim$ contient EXACTEMENT deux éléments.

g) En déduire que p est pair.
