

SEMAINE DU 25 SEPTEMBRE AU 1^{ER} OCTOBRE

RAISONNER, RÉDIGER

Raisonnement par récurrence — simple, double, forte.

SOMMES, PRODUITS, COEFFICIENTS BINOMIAUX

- Sommes \sum , produits \prod . Changements d'indice et simplifications télescopiques. Sommes doubles et produits doubles, avec indices indépendants : $1 \leq i, j \leq n$ ou dépendants : $1 \leq i \leq j \leq n$ et $1 \leq i < j \leq n$.
- Simplification de $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k^2$.
- Sommes géométriques et factorisation de $a^n - b^n$.
- Factorielle, coefficients binomiaux, symétrie, formule du capitaine : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$, formule de Pascal, intégralité, formule du binôme.

RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

- Image et antécédents d'un point, image d'une partie par une fonction, image d'une fonction. Composée de deux fonctions.
- Monotonie, somme de deux fonctions croissantes/décroissantes, composée de deux fonctions monotones. Fonction majorée/minorée/bornée. Maximum/minimum.
- Transformations affines du graphe d'une fonction : $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto f(x) + y_0$, $x \mapsto f(x + x_0)$, $x \mapsto \lambda f(x)$ et $x \mapsto f(\lambda x)$ avec $\lambda > 0$. Parité/imparité/périodicité, opérations sur les fonctions périodiques.
- Dérivabilité, nombre dérivé, dérivée, tangente, opérations sur les dérivées. Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones/strictement monotones. Dérivées successives. Démonstration d'inégalités par étude de fonction.
- Fonctions affines, polynomiales et rationnelles. Racine (réelle) d'une fonction polynomiale et principe de factorisation associé.
- Fonctions exponentielle, logarithme et puissances (quelconques). Croissances comparées.
- Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques.
- Bijection, identité, réciproque. Une fonction est bijective si et seulement si elle possède une réciproque. Graphe d'une réciproque.
- Continuité, lien avec la dérivabilité. TVI et TVI strictement monotone.
- Continuité et dérivabilité d'une réciproque.

QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Formule du binôme.
- Simplification de $\sum_{k=0}^n k$ et factorisation de $a^n - b^n$.
- **(TD)** Toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- **(TD)** Détermination des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $f(m+n) = f(m)f(n)$.
- **(Au tableau, hors poly)** Preuve des limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ en admettant que pour tout $x > -1$: $\ln x \leq x - 1$.