

# SEMAINE DU 24 SEPTEMBRE AU 30 SEPTEMBRE

## RAISONNER, RÉDIGER

Raisonnement par récurrence — simple, double, forte.

## SOMMES, PRODUITS, COEFFICIENTS BINOMIAUX

- Sommes  $\sum$ , produits  $\prod$ . Changements d'indice et simplifications télescopiques. Sommes doubles et produits doubles, avec indices indépendants :  $1 \leq i, j \leq n$  ou dépendants :  $1 \leq i \leq j \leq n$  et  $1 \leq i < j \leq n$ .
- Simplification de  $\sum_{k=0}^n k$  et  $\sum_{k=0}^n k^2$ .
- Sommes géométriques et factorisation de  $a^n - b^n$ .
- Factorielle, coefficients binomiaux, symétrie, formule du capitaine :  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ , formule de Pascal, intégralité, formule du binôme.

## RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles.

- Image et antécédents d'un point, image d'une partie par une fonction, image d'une fonction. Composée de deux fonctions.
- Monotonie, somme de deux fonctions croissantes/décroissantes, composée de deux fonctions monotones. Fonction majorée/minorée/bornée. Maximum/minimum.
- Transformations affines du graphe d'une fonction :  $x \mapsto -f(x)$ ,  $x \mapsto f(-x)$ ,  $x \mapsto f(x) + y_0$ ,  $x \mapsto f(x + x_0)$ ,  $x \mapsto \lambda f(x)$  et  $x \mapsto f(\lambda x)$  avec  $\lambda > 0$ . Parité/imparité/périodicité, opérations sur les fonctions périodiques.
- Dérivabilité, nombre dérivé, dérivée, tangente, opérations sur les dérivées. Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones/strictement monotones. Dérivées successives. Démonstration d'inégalités par étude de fonction.
- Fonctions affines, polynomiales et rationnelles. Racine (réelle) d'une fonction polynomiale et principe de factorisation associé.
- Fonctions exponentielle, logarithme et puissances (quelconques). Croissances comparées.

## QUESTIONS DE COURS DE DÉBUT D'HEURE

- Simplification de  $\sum_{k=0}^n k$  et factorisation de  $a^n - b^n$ .
- Formule du binôme.
- **(TD)** Toute fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- **(TD)** Détermination des fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  pour lesquelles pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$  :  $f(m+n) = f(m)f(n)$ .
- En partant de l'inégalité :  $\ln x \leq x - 1$  pour tout  $x > -1$ , preuve des limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , puis :  
 $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ , puis :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$  pour tous  $\alpha, \beta > 0$ .